Mathematik 1 für Bauingenieure

Prüfung am 5.12.2014
Reinhard Winkler

Name (bitte ausfüllen):

Matrikelnummer (bitte ausfüllen):

Wichtige Hinweise bevor Sie beginnen:

- Die Prüfung besteht aus vier Aufgaben 1,2,3,4, untergliedert in jeweils vier Teilaufgaben A,B,C,D. Zu jeder Teilfrage wird maximal ein Punkt vergeben. Ab 8 von 16 möglichen Punkten ist Ihnen eine positive Note sicher.
- Die Arbeitszeit beträgt 90 Minuten.
- Zu jeder Teilaufgabe wird der Punkt (oder Teile eines Punktes) ausschließlich für das vergeben, was Sie unmittelbar neben bzw. unterhalb der Angabe dieser Teilaufgabe niedergeschrieben haben (und nicht unterhalb der horizontalen Trennlinie zur nächsten Teilaufgabe).

  In den meisten Fällen sollte der jeweils vorgesehene Platz für die Lösung der Aufgabe ausreichen. Es lohnt daher, wenn Sie, bevor Sie mit dem Schreiben beginnen, sich vergewissern, dass Sie Ihre Antwort entsprechend kurz fassen können. Sollten Sie längere Nebenrechnungen oder sonstige schriftliche Überlegungen durchführen wollen, stehen Ihnen dafür die beiden letzten Blätter dieses Heftes zur Verfügung. Was immer Sie auf den letzten beiden Blättern notieren, wird bei der Punkteauswertung ignoriert.
- Wenn Sie sich noch vor Ausführung der Details einen Überblick darüber verschaffen, was in den einzelnen Aufgaben und ihren Teilen zu tun ist, kann das hilfreich für eine kluge Zeiteinteilung sein.

Nur vom Prüfer auszufüllen:

Punkte für Aufgabe 1: Aufgabe 2: Aufgabe 3: Aufgabe 4:

Gesamtpunktezahl:

Note:

Sonstige Bemerkungen:

Aufgabe 1: In dieser Aufgabe spielen die fünf Zahlbereiche $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$ eine Hauptrolle.

Teilaufgabe A: Die quadratische Gleichung $x^2 - 6x + q$ $=0$ hat zwei Lösungen $x_1(q), x_2(q) \in \mathbb{C}$, wobei auch $x_1(q) = x_2(q)$ möglich ist. Geben Sie für jeden der vier Werte $q = -16, 2, 5, 10$ jeweils den kleinsten der Zahlenbereiche $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ an, der beide Lösungen $x_1(q), x_2(q)$ enthält.

$$x_{1,2}(q) = 3 \pm \sqrt{9-q} = \begin{cases} 3\pm\sqrt{9-(-16)} = 3\pm\sqrt{25} = 3\pm 5) \quad -2, 8 \in \underline{\mathbb{Z}} & \text{für } q=-16 \\ 3\pm\sqrt{9-2} = 3\pm\underbrace{\sqrt{7}}_{\notin\mathbb{Q}} \in \underline{\mathbb{R}} \quad \notin\mathbb{N} & \text{für } q=2 \\ 3\pm\sqrt{9-5} = 3\pm\sqrt{4} = 3\pm 2) \quad 1, 5 \in \underline{\mathbb{N}} & \text{für } q=5 \\ 3\pm\sqrt{9-10} = 3\pm\sqrt{-1} = 3\pm i \in \underline{\mathbb{C}} \setminus \mathbb{R} & \text{für } q=10 \end{cases}$$

Teilaufgabe B: Geben Sie ganze Zahlen a_0, a_1, a_2, a_3, a_4 so an, dass die Polynomfunktion $f(x) := a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$ genau zwei nichtreelle (komplexe) Lösungen α_1, α_2 und genau zwei irrationale (reelle) Lösungen α_3, α_4 hat. Geben Sie auch $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ an.

z.B. $\alpha_1 = -i, \alpha_2 = i, \alpha_3 = -\sqrt{2}, \alpha_4 = \sqrt{2}$

$$\Rightarrow \prod_{j=1}^{4} (x-\alpha_j) = \underbrace{(x+i)(x-i)}_{x^2+1} \underbrace{(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})}_{x^2-2} = x^4 - x^2 - 2$$

Teilaufgabe C: Sei $c \in \mathbb{R}$ fest. Eine Menge $T \subseteq \mathbb{R}$ nennen wir c-stabil, wenn $0 \in T$ und wenn aus $x \in T$ stets $x + c \in T$ und $x - c \in T$ folgt, d.h. wenn man von einem Punkt aus T startend in beide Richtungen Schritte der Länge c beliebig setzen kann, ohne T zu verlassen. Die Menge T_c sei definiert als der Durchschnitt aller c-stabilen T, d.h. als die kleinste c-stabile Menge. Geben Sie eine Funktion $f_c : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ mit $T_c = f_c(\mathbb{Z}) = \{f(k) : k \in \mathbb{Z}\}$ in der Form $f_c : k \mapsto \ldots$ an.

$f_c : k \mapsto c \cdot k$

Teilaufgabe D: Sei $M = \{x \in \mathbb{R} : \sin x = 0\}$. Geben Sie ein $c \in \mathbb{R}$ an, für das $M = T_c$. (Hinweis: Es gibt zwei korrekte Lösungen.)

$c = \pi$ (oder $c = -\pi$)

Aufgabe 2: In dieser Aufgabe geht es um unendliche Reihen $A = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $A' = \sum_{n=1}^{\infty} a'_n$, $B = \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ etc.

Teilaufgabe A: Wie sind die Partialsummen s_n einer Reihe mit Gliedern a_n, $n = 1, 2, \ldots$, rekursiv definiert, wie ist der Wert $s := \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ der Reihe definiert?

$$s_0 := 0, \qquad s_{n+1} := s_n + a_{n+1} \quad (n \geq 1)$$

$$s := \lim_{n \to \infty} s_n$$

Teilaufgabe B: Die Glieder a_n und a'_n mögen die Gleichung $a'_n = 2a_n$ erfüllen ($n = 1, 2, \ldots$). Die aus ihnen gebildeten Partialsummen seien s_n bzw. s'_n. Zeigen Sie mittels Induktion $s'_n = 2s_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Markieren Sie dabei Induktionsanfang (IA), Induktionsvoraussetzung (IV), Induktionsbehauptung (IB) und Induktionsschritt (IS).

IA: $n = 0 \Rightarrow s'_0 = 0 = 2 \cdot 0 = 2s_n$

IV: $s'_n = 2s_n$

IB: $s'_{n+1} = 2s_{n+1}$

IS: $s'_{n+1} = s'_n + a'_n \overset{IV}{=} 2s_n + 2a_n = 2(s_n + a_n) = 2s_{n+1}$

Teilaufgabe C: Unter welcher Voraussetzung V nennt man B eine Majorante von A und A eine Minorante von B? Welche (zueinander äquivalenten) Implikationen I1 und I2 über die Konvergenz bzw. Divergenz gelten in diesem Fall (Majoranten- und Minorantenkriterium)?

V: $\forall n: \ |a_n| \leq b_n$

I1: $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergent $\Longrightarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut konvergent

I2: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ nicht absolut konvergent $\Longrightarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ divergent

---

Teilaufgabe D: Zeigen Sie die Divergenz der Reihe mit den Gliedern $b_n = \frac{1}{2n+1}$ unter Verwendung einer geeigneten divergenten Minorante mit Gliedern a_n. Geben Sie die a_n explizit an. (Hinweis: Sie dürfen verwenden, dass die harmonische Reihe divergiert. Sie selbst ist zwar keine Minorante, kann aber bei der Suche nützlich sein.)

$$\frac{1}{2n+1} \geq \frac{1}{2(n+1)} \geq \frac{1}{2 \cdot 2n} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{n} \qquad a_n = \frac{1}{4n}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{1}{4} \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}}_{\text{divergiert}}$$

Aufgabe 3: Für diese Aufgabe sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x) := x^2 \cos \frac{1}{x}$ für $x \neq 0$ und $f(0) := 0$.

Teilaufgabe A: Zeigen Sie, dass f in 0 stetig ist, indem Sie $\delta(\varepsilon)$ in Abhängigkeit von $\varepsilon > 0$ im Sinne der Stetigkeitsdefinition angeben, d.h. derart, dass $|f(x)| < \varepsilon$ für alle x mit $|x| < \delta(\varepsilon)$.

$\varepsilon > 1$, setze $\delta(\varepsilon) = 1$, $|x| < \delta(\varepsilon) = 1 \Rightarrow |f(x)| < \cos\frac{1}{x} \leq 1$.

$\varepsilon \leq 1$, setze $\delta(\varepsilon) := \sqrt{\varepsilon}$, $|x| < \sqrt{\varepsilon} \Rightarrow f(x) = x^2 \cos\frac{1}{x} < (\sqrt{\varepsilon})^2 \cdot 1 = \varepsilon$.

Teilaufgabe B: Ist f für $x \neq 0$ differenzierbar? Begründen Sie Ihre Antwort und berechnen Sie gegebenenfalls $f'(x)$.

Ja, als Verkettung bzw. Produkt der stetigen Funktionen $x \mapsto x^2$, $x \mapsto \frac{1}{x}$, cos

$f'(x) = x^2\left(-\frac{1}{x^2}\right)\cdot\left(-\sin\frac{1}{x}\right) + 2x\cos\left(\frac{1}{x}\right) = \sin\left(\frac{1}{x}\right) + 2x\cdot\cos\left(\frac{1}{x}\right)$

Teilaufgabe C: Ist f an der Stelle $x = 0$ differenzierbar? Begründen Sie Ihre Antwort und berechnen Sie gegebenenfalls $f'(0)$.

$\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{x}\cdot x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to 0} x \cdot \lim_{x \to 0} \cos\left(\frac{1}{x}\right) = 0 \cdot 1 = 0.$

$\Rightarrow$ Ja, $f'(x) = 0$.

Teilaufgabe D: Die Funktion f hat im Intervall $[-1, 1]$ unendlich viele lokale Extremstellen. Begründen Sie das. (Hinweis: Bestimmen Sie die Nullstellen von f und ziehen Sie daraus Ihre Schlüsse.)

Für $x \neq 0$ gilt $f(x) = 0 \Leftrightarrow \cos\left(\frac{1}{x}\right) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2} + k\pi$ mit $k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$

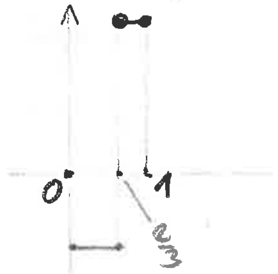
$\Rightarrow x_k = \underbrace{\frac{1}{\frac{\pi}{2} + k\pi}}_{\to 0 \text{ für } k \to \infty}$ mit $k \in \mathbb{Z}$

sind die Nullstellen von f, zwischen x_k und x_{k+1} muss nach dem Satz vom Maximum eine Extremstelle liegen, also ∞ viele in $[-1,1]$

Aufgabe 4: In dieser Aufgabe wird nach Funktionen $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ gefragt, deren Integrale verschiedenen Vorgaben entsprechen. Geben Sie jeweils sowohl eine Skizze von f als auch eine Beschreibung durch Formeln an.

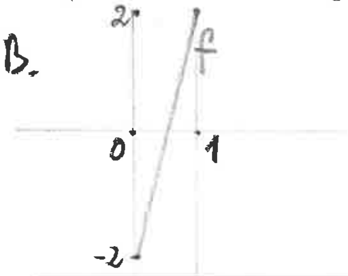
Teilaufgabe A: Geben Sie ein $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ an mit $\int_0^1 f(x)\,dx = 0$ und $\int_0^1 f(x)^3\,dx > 0$. (Skizze und Beschreibung durch Formel. Hinweis: Es gibt Funktionen f mit den geforderten Eigenschaften, die nur zwei Werte annehmen.)

z.B. $f(x) = \begin{cases} -1 & \text{für } 0 \le x \le \frac{2}{3} \\ 2 & \frac{2}{3} < x \le 1 \end{cases}$



Teilaufgabe B: Geben Sie ein stetiges $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ an mit Supremum > 1 und $\int_0^1 f(x)\,dx = 0$. (Skizze und Beschreibung durch Formel.)

z.B.



$f(x) = -2 + 4x$

Teilaufgabe C: Geben Sie ein $f : (0,1] \to \mathbb{R}$ an mit

$$\lim_{\varepsilon \to 0+} \int_\varepsilon^1 f(x)\,dx < \infty \quad \text{und} \quad \lim_{\varepsilon \to 0+} \int_\varepsilon^1 f(x)^2\,dx = \infty.$$

(Hinweis: $f(x) := x^\alpha$ für $x \neq 0$ mit geeignetem α wählen. Mit welchem?)

$\alpha = -\frac{1}{2} \Rightarrow \int f(x)\,dx = \int x^{-\frac{1}{2}}\,dx = \frac{1}{1/2} x^{+\frac{1}{2}} = 2\sqrt{x} + c, \quad \int f(x)^2\,dx = \int \frac{dx}{x} = \ln|x| + c$

$\Rightarrow \lim_{\varepsilon \to 0} \int_\varepsilon^1 f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon \to 0} 2(\sqrt{1} - \underbrace{\sqrt{\varepsilon}}_{\to 0}) = 2 < \infty$

$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_\varepsilon^1 f(x)^2\,dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \underbrace{\ln(1)}_{0} - \underbrace{\ln(\varepsilon)}_{\to -\infty} = \infty$

Teilaufgabe D: Geben Sie ein $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ an, das unendlich viele Unstetigkeitsstellen hat, aber trotzdem Riemann-integrierbar ist. (Anleitung: Wählen Sie eine geeignete Folge von Zahlen $x_n \in [0,1]$, wo f unstetig ist, dazwischen aber konstant.)

$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{für } \frac{1}{n+1} < x \le \frac{1}{n} \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}$