Mathematik 1 für Bauingenieure

Prüfung am 16.1.2015 –
Reinhard Winkler

Name (bitte ausfüllen):

Matrikelnummer (bitte ausfüllen):

Wichtige Hinweise bevor Sie beginnen:

- Die Prüfung besteht aus vier Aufgaben 1,2,3,4, untergliedert in jeweils vier Teilaufgaben A,B,C,D. Zu jeder Teilaufgabe wird maximal ein Punkt vergeben. Ab 8 von 16 möglichen Punkten ist Ihnen eine positive Note sicher.
- Die Arbeitszeit beträgt 90 Minuten.
- Zu jeder Teilaufgabe wird der Punkt (oder Teile eines Punktes) ausschließlich für das vergeben, was Sie unmittelbar neben bzw. unterhalb der Angabe dieser Teilaufgabe niedergeschrieben haben (und nicht unterhalb der horizontalen Trennlinie zur nächsten Teilaufgabe).

  In den meisten Fällen sollte der jeweils vorgesehene Platz für die Lösung der Aufgabe ausreichen. Es lohnt daher, wenn Sie, bevor Sie mit dem Schreiben beginnen, sich vergewissern, dass Sie Ihre Antwort entsprechend kurz fassen können. Sollten Sie längere Nebenrechnungen oder sonstige schriftliche Überlegungen durchführen wollen, stehen Ihnen dafür die beiden letzten Blätter dieses Heftes zur Verfügung. Was immer Sie auf den letzten beiden Blättern notieren, wird bei der Punkteauswertung ignoriert.
- Wenn Sie sich noch vor Ausführung der Details einen Überblick darüber verschaffen, was in den einzelnen Aufgaben und ihren Teilen zu tun ist, kann das hilfreich für eine kluge Zeiteinteilung sein.

Nur vom Prüfer auszufüllen:

Punkte für Aufgabe 1: Aufgabe 2: Aufgabe 3: Aufgabe 4:

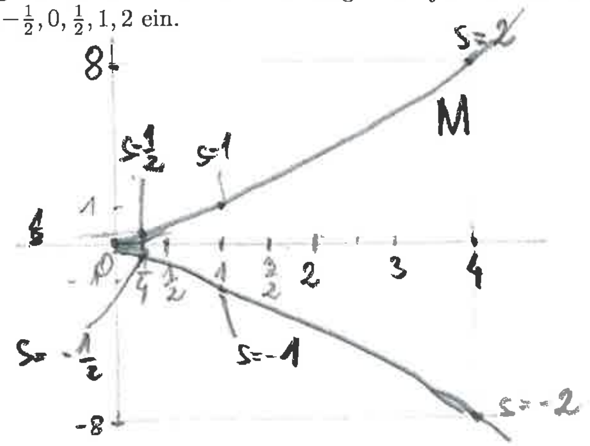
Gesamtpunktezahl:

Note:

Sonstige Bemerkungen:

Aufgabe 1: Gegeben ist die Menge $M := \{(s^2, s^3) : \ s \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^2$.

Teilaufgabe A: Skizzieren Sie M. Tragen Sie jedenfalls die Punkte für die Parameterwerte $s = -2, -1, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 1, 2$ ein.



Teilaufgabe B: (Richtige Antworten ankreuzen bzw. mit … gekennzeichnete Leerstellen ausfüllen.)

Ist M eine Funktion? ○ ja ☒ nein

Wenn ja, ist $f := M$ injektiv? ○ ja ○ nein

Wenn nein, geben Sie eine maximale Teilmenge f von M an, die eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ ist:

$f := \{ (s^2, s^3): \ s \geq 0 \} \subseteq \mathbb{R}^2$,

und geben Sie den Definitionsbereich $D \subseteq \mathbb{R}$ sowie den Wertebereich $f(D)$ von f an:

$D = \{ x : \ x \geq 0 \} \subseteq \mathbb{R}$

$f(D) = \{ y : \ y \geq 0 \} \subseteq \mathbb{R}$

Teilaufgabe C: Geben Sie einen einfachen Funktionsterm $t_1(x)$ an, so dass für f aus Teilaufgabe B die Beziehung $f : x \mapsto t_1(x)$ gilt. (Mit … gekennzeichnete Leerstelle ausfüllen.)

$t_1(x) := x^{\frac{3}{2}} = \sqrt{x^3}$

Teilaufgabe D: Finden Sie eine maximale Teilmenge T von M, die sogar eine injektive Funktion ist, und geben Sie einen Funktionsterm t_2 für deren Umkehrfunktion $x \mapsto t_2(x)$ an. (Mit … gekennzeichnete Leerstellen ausfüllen.)

$T := \{ (s^2, s^3): \ s \geq 0 \} = f$

$t_2(x) := x^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{x^2}$

Aufgabe 2: Vom Polynom $f(x) := a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$ sei bekannt, dass $f(i) = f(-i) = f(-2) = 0$ und $f(0) = 6$. (i = imaginäre Einheit)

Teilaufgabe A: Berechnen Sie die Koeffizienten a_0, a_1, a_2, a_3 von f.

$$f(x) = c \cdot \underbrace{(x-i)(x+i)}_{x^2+1}(x+2) = c\,(x^3+2x^2+x+2)$$

$$6 = f(0) = c \cdot 2 \Rightarrow c = 3 \Rightarrow f(x) = 3x^3+6x^2+3x+6$$

$$\Rightarrow a_0 = 6,\ a_1 = 3,\ a_2 = 6,\ a_3 = 3$$

Teilaufgabe B: Finden Sie Zahlen b_0, b_1, b_2, b_3 mit $f(x) = \sum_{n=0}^{3} b_n(x+2)^n$

$$f(x) = 3(x^2+1)(x+2) \Rightarrow$$

$$f(x) = 0 + (x+2)\cdot(3x^2+3) = 0 + (x+2)\cdot\big(15 + (x+2)\underbrace{(3x-6)}_{3\cdot(x+2)-12}\big) = 0 + (x+2)(15 + (x+2)(-12 + 3(x+2)))$$

$$(3x^2+3) : (x+2) = 3x - 6$$
$$\underline{3x^2+6x}$$
$$-6x+3$$
$$\underline{-6x-12}$$
$$15$$

$$(3x-6) : (x+2) = 3$$
$$\underline{3x+6}$$
$$-12$$

$$\Rightarrow b_0 = 0,\quad b_1 = 15,\quad b_2 = -12,\quad b_3 = 3$$

Teilaufgabe C: Welcher Zusammenhang besteht zwischen den Ableitungen $f^{(n)}(-2)$ und den b_n aus Teilaufgabe B?

$$b_n = \frac{f^{(n)}(-2)}{n!}$$

Teilaufgabe D: Berechnen Sie sämtliche Ableitungen $f^{(n)}(-2)$, $n \in \mathbb{N}$, von f an der Stelle -2.

$$\boxed{\begin{aligned} &\text{Laut B+C gilt:}\\ &f(-2) = b_0 = 0\\ &f'(-2) = b_1 = 15\\ &f''(-2) = 2b_2 = -24\\ &f'''(-2) = 6b_3 = 18\\ &f^{(n)}(-2) = n!\,b_n = 0 \quad \forall n \geq 4 \end{aligned}}$$

Probe:

$$\left\{\begin{aligned} f(x) &= 3x^3+6x^2+3x+6 && \Rightarrow f(-2) = 0\\ f'(x) &= 9x^2+12x+3 && \Rightarrow f'(-2) = 15\\ f''(x) &= 18x+12 && \Rightarrow f''(-2) = -24\\ f'''(x) &= 18 && \Rightarrow f'''(-2) = 18\\ f^{(n)}(x) &= 0 \quad \forall n \geq 4 && \Rightarrow f^{(n)}(-2) = 0 \quad \forall n \geq 4 \end{aligned}\right\}$$

Aufgabe 3: Gegeben seien die Funktionen $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch $f(x) := e^{x^2} = e^{(x^2)}$ für $x \in \mathbb{R}$ bzw. $g(x) := x^2 \cos \frac{1}{x}$ für $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und $g(0) := 0$.

Teilaufgabe A: Ermitteln Sie die Funktion f' (Funktionsterm angeben) und die Zahl $f'(0)$.

$f'(x) = 2x e^{x^2} \Rightarrow f'(0) = 0$

Teilaufgabe B: Ermitteln Sie die Funktion g' auf $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ (Funktionsterm angeben) und die Zahl $g'(0)$.

$g'(x) = x^2 \left(-\frac{1}{x^2}\right)\left(-\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right) + 2x \cos\left(\frac{1}{x}\right) = \sin\left(\frac{1}{x}\right) + 2x\cos\left(\frac{1}{x}\right)$

Teilaufgabe C: Hat f eine Potenzreihendarstellung um die Entwicklungsstelle $x_0 := 0$? Wenn ja, geben Sie diese an; wenn nein, begründen Sie dies.

$f(x) = e^{x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x^2)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n!}$

Teilaufgabe D: Hat g eine Potenzreihendarstellung um die Entwicklungsstelle $x_0 := 0$? Wenn ja, geben Sie diese an; wenn nein, begründen Sie dies.

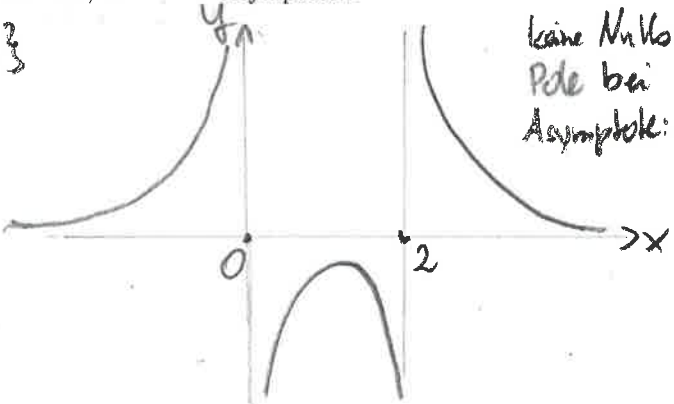
Nein, denn $\nexists \lim_{x \to 0} g'(x) = \lim_{x \to 0} \underbrace{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}_{\text{oszilliert zwischen } -1 \text{ und } +1} + \underbrace{2x\cos\left(\frac{1}{x}\right)}_{\to 0}$

g ist in 0 also nicht stetig differenzierbar, ein Potenzreihe wäre das aber sehr wohl.

Aufgabe 4: Gegeben sei die reelle Funktion $f(x) := \frac{1}{x(x-2)}$, die in den folgenden Teilaufgaben skizziert bzw. integriert werden soll.

Teilaufgabe A: Geben Sie den maximalen Definitionsbereich $D \subseteq \mathbb{R}$ für $f : D \to \mathbb{R}$ an und skizzieren Sie f mit Nullstellen, Polen und Asymptoten.

$D = \mathbb{R} \setminus \{0, 2\}$



keine Nullstelle
Pole bei $x=0$, 2
Asymptote: x-Achse $y=0$.

Teilaufgabe B: Berechnen Sie das unbestimmte Integral von f, genauer: Geben Sie zunächst eine Stammfunktion $F : D \to \mathbb{R}$ (D aus Teilaufgabe A) von f an und dann die Menge M aller Stammfunktionen von f.

Partialbruchzerlegung: $\frac{1}{x(x-2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-2} \Rightarrow 1 = A(x-2) + Bx = -2A + x(A+B)$

$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} A+B=0 \\ -2A=1 \Rightarrow A=-\frac{1}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow B = \frac{1}{2}$

$F(x) = \int f(x)\,dx = \frac{1}{2}\int -\frac{1}{x} + \frac{1}{x-2}\,dx = \frac{1}{2}\left(\ln|x-2| - \ln|x|\right)$

$M =$ Sei $F_{c_1,c_2,c_3}(x) = \begin{cases} F(x)+c_1 & \text{für } x<0 \\ F(x)+c_2 & \text{für } 0<x<2 \\ F(x)+c_3 & \text{für } 2<x \end{cases}$, dann ist $M = \{F_{c_1,c_2,c_3} : c_1,c_2,c_3 \in \mathbb{R}\}$

Teilaufgabe C: Für welche Paare $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ mit $a < b$ existiert das Riemannintegral $\int_a^b f(x)\,dx$? Berechnen Sie dieses, indem Sie dafür einen Funktionsterm in a und b ohne Integralzeichen angeben.

$I = \int_a^b f(x)\,dx$ existiert für $0,2 \notin [a,b]$, also für $a<b<0$, $0<a<b<2$, $2<a<b$

In diesen Fälle ist $I = \ln|b-2| - \ln|b| - \ln|a-2| + \ln|a|$

Teilaufgabe D: Für welche der unten angegebenen Mengen M ist das Lebesgueintegral $I := \int_M f\,d\lambda$ definiert (ankreuzen)? Gebenenfalls ist der Wert von I anzugeben (ausfüllen). Beachten Sie, dass als Werte des Lebesgueintegrals auch $-\infty$ und ∞ zugelassen sind.

$M = (0, \infty)$:	○ I ist definiert mit Wert	✗ I ist nicht definiert
$M = (2, \infty)$:	✗ I ist definiert mit Wert ∞	○ I ist nicht definiert
$M = (3, \infty)$:	✗ I ist definiert mit Wert $\ln(3)$	○ I ist nicht definiert