Mathematik 1 für Bauingenieure

Prüfung am 6.3.2015
Reinhard Winkler

Name (bitte ausfüllen):

Matrikelnummer (bitte ausfüllen):

Wichtige Hinweise bevor Sie beginnen:

- Die Prüfung besteht aus vier Aufgaben 1,2,3,4, untergliedert in jeweils vier Teilaufgaben A,B,C,D. Zu jeder Teilaufgabe wird maximal ein Punkt vergeben. Ab 8 von 16 möglichen Punkten ist Ihnen eine positive Note sicher.
- Die Arbeitszeit beträgt 90 Minuten.
- Wenn in der Angabe nicht ausdrücklich anders vermerkt, wird zu jeder Teilaufgabe der Punkt (oder Teile eines Punktes) ausschließlich für das vergeben, was Sie unmittelbar neben bzw. unterhalb der Angabe dieser Teilaufgabe niedergeschrieben haben (und nicht unterhalb der horizontalen Trennlinie zur nächsten Teilaufgabe).

  In den meisten Fällen sollte der jeweils vorgesehene Platz für die Lösung der Aufgabe ausreichen. Es lohnt daher, wenn Sie, bevor Sie mit dem Schreiben beginnen, sich vergewissern, dass Sie Ihre Antwort entsprechend kurz fassen können. Sollten Sie längere Nebenrechnungen oder sonstige schriftliche Überlegungen durchführen wollen, stehen Ihnen dafür die beiden letzten Blätter dieses Heftes zur Verfügung. Was immer Sie auf den letzten beiden Blättern notieren, wird bei der Punkteauswertung ignoriert.
- Wenn Sie sich noch vor Ausführung der Details einen Überblick darüber verschaffen, was in den einzelnen Aufgaben und ihren Teilen zu tun ist, kann das hilfreich für eine kluge Zeiteinteilung sein.

Nur vom Prüfer auszufüllen:

Punkte für Aufgabe 1: Aufgabe 2: Aufgabe 3: Aufgabe 4:

Gesamtpunktezahl:

Note:

Sonstige Bemerkungen:

Aufgabe 1: In dieser Aufgabe geht es um Rekursion, Induktion, Faktorielle und um die Darstellung von Mengen.

Teilaufgabe A: Für eine natürliche Zahl $n \geq 1$ ergibt sich $n!$ (n faktorielle, n Fakultät) durch Mulitiplikation der Zahlen $1, 2, \ldots, n$. Fassen wir die Werte $n!$ als Glieder a_n einer Folge auf, so lässt sich diese auch rekursiv definieren, indem a_0 festgelegt und außerdem angegeben wird, wie sich a_{n+1} aus a_n ergibt. Tun Sie für $a_n = n!$ beides, indem Sie die Leerstellen ausfüllen:

$a_0 := \ldots$ $\qquad\qquad$ $a_{n+1} := \ldots$

Teilaufgabe B: Jede natürliche Zahl $n > 0$ lässt sich bekanntlich eindeutig als ein Produkt von Primzahlpotenzen schreiben. Die Zahl $10!$ kann nur Primteiler $p \leq 10$, also $p = 2, 3, 5, 7$ haben. Folglich gibt es Exponenten $e_2, e_3, e_5, e_7 \in \mathbb{N}$ mit $10! = 2^{e_2} 3^{e_3} 5^{e_5} 7^{e_7}$. Geben Sie diese Zahlen an:

$e_2 = \ldots \quad e_3 = \ldots \quad e_5 = \ldots \quad e_7 = \ldots$

Teilaufgabe C: Wenn Sie Teilaufgabe B richtig gelöst haben, können Sie daraus $e_2 \geq 5$ ablesen. Also ist, wenn man $n = 5$ setzt, 2^n ein Teiler von $(2n)!$, symbolisch $2^n | (2n)!$. Dass diese Aussage für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt, lässt sich mit Induktion beweisen. Der Induktionsanfang ist offenbar erfüllt, weil $2^0 = 1$ ein Teiler von $(2 \cdot 0)! = 0! = 1$ ist. Warum folgt aus der Induktionsannahme $2^n | (2n)!$ die Induktionsbehauptung $2^{n+1} | (2(n+1))!$? (Hinweis: Die Induktionsannahme bedeutet, dass es ein $m \in \mathbb{N}$ gibt mit $m2^n = (2n)!$. Damit lässt sich auch $(2(n+1))! = (2n+2)!$ entsprechend darstellen.)

Teilaufgabe D: Das Induktionsprinzip lässt sich so verstehen, dass man, ausgehend vom Anfangspunkt $m := 0$ und mit konstanter Schrittlänge $s := 1$ voranschreitend, alle Elemente der Menge $\mathbb{N}$ erreicht. Wählt man andere Anfangspunkte m und andere Schrittlängen s, so erhält man gewisse andere Mengen $M(m, s) := \{m + ns : \ n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathbb{R}$ statt $\mathbb{N}$. Natürlich kann nicht jede Teilmenge von $\mathbb{R}$ auf diese Weise auftreten. Geben Sie für die folgenden Mengen M an, für welche $m, s \in \mathbb{R}$ die Mengengleichung $M = M(m, s)$ gilt, bzw. ob so eine Darstellung von M unmöglich ist:

$M =$ Menge der positiven geraden Zahlen	$m = \ldots$	$s = \ldots$	○ unmöglich
$M = \mathbb{Z}$	$m = \ldots$	$s = \ldots$	○ unmöglich
$M =$ Menge der Primzahlen	$m = \ldots$	$s = \ldots$	○ unmöglich
$M = \{3(n+2) - 17 : \ n \in \mathbb{N}\}$	$m = \ldots$	$s = \ldots$	○ unmöglich
$M = \mathbb{Q}$	$m = \ldots$	$s = \ldots$	○ unmöglich
$M = \{-n : \ n \in \mathbb{N}\}.$	$m = \ldots$	$s = \ldots$	○ unmöglich

Aufgabe 2: In dieser Aufgabe geht es um Grenzwerte und Häufungspunkte von Folgen.

Teilaufgabe A: Geben Sie $x := \lim_{n\to\infty} a_n$ für die Folgenglieder $a_n = \frac{3n-\sin n}{2n+\cos n}$ an.

$x = \ldots$

Teilaufgabe B: Stellen Sie die Folgenglieder a_n aus Teilaufgabe A in der Form $a_n = \frac{b_n}{c_n}$ dar derart, dass die Grenzwerte $b := \lim_{n\to\infty} b_n$ und $c := \lim_{n\to\infty} c_n$ als reelle Zahlen ($\neq \infty$ und $c \neq 0$) existieren und geben Sie b und c an. (Achtung: Es wäre falsch, einfach $b_n := 3n - \sin n$ und $c_n := 2n + \cos n$ zu setzen, weil diese Folgen ja gegen ∞ divergieren!)

$b_n := \ldots$ $\qquad$ $b = \ldots$

$c_n := \ldots$ $\qquad$ $c = \ldots$

Teilaufgabe C: Formulieren Sie einen allgemeinen Satz über den Grenzwert von Quotienten, der zusammen mit Teilaufgabe B Ihr Ergebnis aus Teilaufgabe A unmittelbar impliziert.

Teilaufgabe D: Im Zusammenhang mit den Begriffen Grenzwert und Häufungspunkt einer reellen Folge mit den Gliedern a_n spielt die Ungleichung $|a_n - x| < \varepsilon$ eine wichtige Rolle. Für $x \in \mathbb{R}$ betrachten wir folgende vier Aussagen:
1) Die Folge der a_n hat x als Grenzwert.
2) Die Folge der a_n hat x nicht als Grenzwert.
3) Die Folge der a_n hat x als Häufungspunkt.
4) Die Folge der a_n hat x nicht als Häufungspunkt.
Jede dieser vier Aussagen findet sich in formaler Schreibweise unter den nachfolgenden Fomeln wieder. Ordnen Sie zu, indem Sie jeweils richtig ankreuzen.

- $\exists \varepsilon > 0\ \forall n_0\ \forall n \geq n_0 :\ |a_n - x| < \varepsilon$ bedeutet ○ 1), ○ 2), ○ 3), ○ 4), ○ keine der Aussagen 1)-4).
- $\forall \varepsilon > 0\ \forall n_0\ \exists n \geq n_0 :\ |a_n - x| < \varepsilon$ bedeutet ○ 1), ○ 2), ○ 3), ○ 4), ○ keine der Aussagen 1)-4).
- $\exists \varepsilon > 0\ \exists n_0\ \forall n \geq n_0 :\ |a_n - x| \geq \varepsilon$ bedeutet ○ 1), ○ 2), ○ 3), ○ 4), ○ keine der Aussagen 1)-4).
- $\exists \varepsilon > 0\ \forall n_0\ \exists n \geq n_0 :\ |a_n - x| \geq \varepsilon$ bedeutet ○ 1), ○ 2), ○ 3), ○ 4), ○ keine der Aussagen 1)-4).
- $\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0\ \forall n \geq n_0 :\ |a_n - x| \geq \varepsilon$ bedeutet ○ 1), ○ 2), ○ 3), ○ 4), ○ keine der Aussagen 1)-4).
- $\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0\ \forall n \geq n_0 :\ |a_n - x| < \varepsilon$ bedeutet ○ 1), ○ 2), ○ 3), ○ 4), ○ keine der Aussagen 1)-4).

Aufgabe 3: In dieser Aufgabe geht es um Stetigkeit und um den Zwischenwertsatz für stetige Funktionen.

Teilaufgabe A: Die Funktion $f : \mathbb{R} \setminus \{3\} \to \mathbb{R}$ sei durch $f(x) := \frac{2}{x-3}$ gegeben. Ermitteln Sie jene Menge D und jene bijektive Funktion $f^* : D \to \mathbb{R} \setminus \{3\}$, $y \mapsto f^*(y)$ an, für die $f^*(f(x)) = x$ für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{3\}$ gilt. Schreiben Sie das Ergebnis Ihrer Überlegungen in die dafür vorgesehenen Leerstellen.

$$D := \ldots\ldots \qquad f^*(y) := \ldots\ldots$$

Teilaufgabe B: Obwohl die Funktion f aus Teilaufgabe A auf ihrem gesamten Definitionsbereich $\mathbb{R} \setminus \{3\}$ stetig ist, ist es nicht möglich, den Definitionsbereich auf ganz $\mathbb{R}$ auszuweiten, weil jede Definition des Funktionswertes $f(3)$ zu einer Unstetigkeit von f an der Stelle 3 führt. Es gibt aber Funktionen $g : \mathbb{R} \setminus \{3\} \to \mathbb{R}$ derart, dass das Produkt $h := fg$ von f und g stetig auf ganz $\mathbb{R}$ fortgesetzt werden kann. Geben Sie so ein g, das zusätzlich $g(x) \neq 0$ für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{3\}$ erfüllt, und den zugehörigen Wert $h(3)$, der h stetig macht, an.

$$g(x) := \ldots\ldots \qquad h(3) = \ldots\ldots$$

Teilaufgabe C: Eine Version des Zwischenwertsatzes besagt, dass jede stetige Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ mit $f(a) < 0 < f(b)$ eine Nullstelle in $D := [a, b]$ hat. Markieren Sie im Beweis unten jene beiden Stellen, wo verwendet wird, dass jede stetige Funktion auch folgenstetig ist, indem Sie über das entsprechende Gleichheitszeichen den Buchstaben C eintragen.

Teilaufgabe D:

Wir betrachten die Funktion $f : [0, 2] \to \mathbb{R}$, $f(x) := x^2 - 2$ auf dem Intervall $[a, b] := [0, 2]$. Offenbar sind die Voraussetzungen des Zwischenwertsatzes erfüllt, und tatsächlich gibt es die Nullstelle $x = \sqrt{2} \in [0, 2]$. Wegen $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ wäre der Zwischenwertsatz falsch, wenn man Funktionen statt auf $\mathbb{R}$ auf $\mathbb{Q}$ betrachtete. Markieren Sie im Beweis unten jenen Satz, der für $f : D \to \mathbb{R}$ mit $D = [a, b] \cap \mathbb{Q}$ statt $D = [a, b]$ ein Fehlschluss wäre (obwohl $a = 0, b = 2 \in \mathbb{Q}$), indem Sie ihn unterwellen.

Beweis des Zwischenwertsatzes aus Teilaufgabe C, auf den sich auch Teilaufgabe D bezieht:

Wir konstruieren eine Folge von Intervallen $I_n = [a_n, b_n]$ mit Halbierungspunkten $h_n := \frac{a_n + b_n}{2}$, $n \in \mathbb{N}$ rekursiv. Und zwar sei $a_0 := a$, $b_0 := b$. Für die Definition der Glieder a_{n+1} und b_{n+1} unterscheiden wir zwei Fälle: $f(h_n) \geq 0$ (Fall 1) oder $f(h_n) < 0$ (Fall 2). Im Fall 1 setzen wir $a_{n+1} := a_n$ und $b_{n+1} := h_n$, im Fall 2 setzen wir $a_{n+1} := h_n$ und $b_{n+1} := b_n$. Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist also I_{n+1} die linke (Fall 1) oder die rechte (Fall 2) Hälfte von I_n, außerdem $f(a_{n+1}) < 0$ und $f(b_{n+1}) \geq 0$. Die Konstruktion garantiert die unendliche Ungleichungskette $a = a_0 \leq a_1 \leq a_2 \leq \ldots \leq b_2 \leq b_1 \leq b_0 = b$. Die a_n bilden also eine monotone und beschränkte Folge, müssen daher nach einem allgemeinen Satz einen Grenzwert x in $\mathbb{R}$ haben. Weil a und b zu D gehören, folgt $x := \lim_{n\to\infty} a_n \in D$ und analog $y := \lim_{n\to\infty} b_n \in D$. Mit Induktion zeigt man $b_n - a_n = \frac{b_0 - a_0}{2^n}$, woraus $y - x = \lim_{n\to\infty} b_n - \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$, also $x = y$ folgt. Weil f stetig ist, folgt einerseits $f(x) = f(\lim_{n\to\infty} a_n) = \lim_{n\to\infty} f(a_n) \leq 0$ und analog $f(x) = f(y) = f(\lim_{n\to\infty} b_n) = \lim_{n\to\infty} f(b_n) \geq 0$. Somit ist $f(x) = 0$, und die gesuchte Nullstelle $x \in [a, b]$ ist gefunden.

Aufgabe 4: Für reelle Zahlen $a < b$, eine Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, eine Zerlegung $Z = \{a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b\}$ und eine zugehörige Belegung $B = \{\xi_i : \ i = 1, 2, \ldots, n\}$ mit $x_{i-1} \leq \xi_i \leq x_i$ für $i = 1, 2, \ldots, n$ schreiben wir für die zugehörige Riemannsumme

$$S(f, Z, B) := \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) f(\xi_i).$$

Teilaufgabe A: Berechnen Sie die Riemannsummen für $f : [0, 3] \to \mathbb{R}$, $f(x) := x^2$, $Z := \{0, 1, 2, 3\}$ sowie die Belgungen $B_1 := \{0, 1, 2\}$ und $B_2 := \{1, 2, 3\}$.

$S(f, Z, B_1) = \ldots\ldots$

$S(f, Z, B_2) = \ldots\ldots$

Teilaufgabe B: Fertigen Sie zwei Skizzen der Funktion f zusammen mit den sich daraus ergebenden Flächen der Größe $S(f, Z, B_1)$ bzw. $S(f, Z, B_2)$ aus Teilaufgabe A an.

Teilaufgabe C: Die Werte $S(f, Z, B)$ aus den Teilaufgaben A und B lassen sich als Riemannsche Untersumme $U(f, Z)$ bzw. Obersumme $O(f, Z)$ deuten. Das liegt an einer Eigenschaft der dort verwendeten Funktion f. Diese Eigenschaft sei mit E bezeichnet. Denn es gilt der allgemeine Satz:

Hat $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ die Eigenschaft E, so gelten für alle Zerlegungen Z von $[a, b]$ die Gleichungen $U(f, Z) = S(f, Z, B_1)$ für die Belegung $B_1 := Z \setminus \{b\}$ und $O(f, Z) = S(f, Z, B_2)$ für die Belegung $B_2 := Z \setminus \{a\}$.

Wie nennt man diese Eigenschaft E einer reellen Funktion f und wie ist sie definiert?

Teilaufgabe D: Angenommen, für jedes $n = 1, 2, \ldots$ ist die Zerlegung Z_n des Intervalls $[0, 3]$ definiert durch $Z_n := \{\frac{3i}{n} : \ i = 0, 1, \ldots, n\}$. Begründen Sie, warum für die Funktion f aus Teilaufgabe A der Grenzwert $\lim_{n\to\infty} U(f, Z_n)$ existiert und bestimmen Sie ihn.

Raum für Nebenrechnungen und sonstige Notizen, die bei der Beurteilung ignoriert werden.

Raum für Nebenrechnungen und sonstige Notizen, die bei der Beurteilung ignoriert werden.