Mathematik 1 für Bauingenieure

Prüfung am 9.10.2015
Reinhard Winkler

Name (bitte ausfüllen):

Matrikelnummer (bitte ausfüllen):

Wichtige Hinweise bevor Sie beginnen:

- Die Prüfung besteht aus vier Aufgaben 1,2,3,4, untergliedert in jeweils vier Teilaufgaben A,B,C,D. Zu jeder Teilaufgabe wird maximal ein Punkt vergeben. Ab 8 von 16 möglichen Punkten ist Ihnen eine positive Note sicher.
- Die Arbeitszeit beträgt 90 Minuten.
- Wenn in der Angabe nicht ausdrücklich anders vermerkt, wird zu jeder Teilaufgabe der Punkt (oder Teile eines Punktes) ausschließlich für das vergeben, was Sie unmittelbar neben bzw. unterhalb der Angabe dieser Teilaufgabe niedergeschrieben haben (und nicht unterhalb der horizontalen Trennlinie zur nächsten Teilaufgabe).

  In den meisten Fällen sollte der jeweils vorgesehene Platz für die Lösung der Aufgabe ausreichen. Es lohnt daher, wenn Sie, bevor Sie mit dem Schreiben beginnen, sich vergewissern, dass Sie Ihre Antwort entsprechend kurz fassen können. Sollten Sie längere Nebenrechnungen oder sonstige schriftliche Überlegungen durchführen wollen, stehen Ihnen dafür die beiden letzten Blätter dieses Heftes zur Verfügung. Was immer Sie auf den letzten beiden Blättern notieren, wird bei der Punkteauswertung ignoriert.
- Wenn Sie sich noch vor Ausführung der Details einen Überblick darüber verschaffen, was in den einzelnen Aufgaben und ihren Teilen zu tun ist, kann das hilfreich für eine kluge Zeiteinteilung sein.

Nur vom Prüfer auszufüllen:

Punkte für Aufgabe 1: Aufgabe 2: Aufgabe 3: Aufgabe 4:

Gesamtpunktezahl:

Note:

Sonstige Bemerkungen:

Aufgabe 1: In dieser Aufgabe geht es um bestimmte Mengen reeller Zahlen und Operationen mit ihnen. Und zwar sei für jedes $c \in \mathbb{R}$ die Menge M_c definiert durch $M_c := \{kc : \ k \in \mathbb{Z}\}$.

Teilaufgabe A: Für zwei Zahlen $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ kann M_{c_1} eine Teilmenge von M_{c_2} sein (d.h. $M_{c_1} \subseteq M_{c_2}$) oder auch nicht. Geben Sie an, wann $M_{c_1} \subseteq M_{c_2}$ für $c_1, c_2 \in \{1, -2, 3, \pi\}$ gilt, indem Sie in die entsprechenden noch leeren Felder der folgenden Tabelle ein $+$ oder $-$ eintragen. Zur Illustration: In der obersten Reihe (neben M_1) ist im ersten Feld (unter M_1) bereits ein $+$ eingetragen, weil M_1 eine Teilmenge von sich selbst ist, im zweiten Feld (unter M_2) hingegen ein $-$, weil M_1 keine Teilmenge von M_{-2} ist.

$\subseteq$	M_1	M_{-2}	M_3	M_π
M_1	$+$	$-$		
M_{-2}				
M_3				
M_π				

Teilaufgabe B: Angenommen, für zwei reelle Zahlen $c_1 \neq c_2 \in \mathbb{R}$ gilt $M_{c_1} = M_{c_2}$. Wie ergibt sich dann c_2 aus c_1?

$c_2 = \ldots$

Teilaufgabe C: Geben Sie ein $c \in \mathbb{R}$ an, so dass $M_{-2} \cap M_3 = M_c$ gilt. (Es gibt zwei korrekte Antworten.)

$c = \ldots$

Teilaufgabe D: Die Menge $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen lässt sich nicht als Vereinigung von zwei oder endlich vielen Mengen der Form M_c darstellen, sehr wohl aber als unendliche Vereinigung $\mathbb{Q} = \bigcup_{n=1}^{\infty} M_{c_n}$, wenn man die Folge der c_n geeignet wählt. Geben Sie eine Formel für derartige c_n an. (Es gibt sehr viele richtige Antworten, davon ist aber eine besonders naheliegend.)

$c_n = \ldots$ (für $n = 1, 2, \ldots$).

Aufgabe 2: Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei stetig mit $f(x) = \frac{e^{3x^2}+2x-1}{x}$ für alle $x \neq 0$.

Teilaufgabe A: Welchen Wert hat f an der Stelle 0?

$f(0) = \ldots$

Teilaufgabe B: Geben Sie die Koeffizienten a_n der Potenzreihendarstellung von $e^{3x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ an. Unterscheiden Sie dabei gerade und ungerade n.

$a_{2n} = \ldots$ $\qquad$ $a_{2n+1} = \ldots$ $\qquad$ (beides für $n = 0, 1, 2, \ldots$)

Teilaufgabe C: Geben Sie die Koeffizienten b_n der Potenzreihendarstellung von $f(x) = \frac{e^{3x^2}+2x-1}{x} = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ an.

$b_0 = \ldots$ $\qquad$ $b_{2n} = \ldots$ (für $n = 1, 2, \ldots$) $\qquad$ $b_{2n+1} = \ldots$ (für $n = 0, 1, 2, \ldots$)

Teilaufgabe D: Ist f an der Stelle 0 differenzierbar? Wenn ja, geben Sie $f'(0)$ an; wenn nein, begründen Sie dies.

Aufgabe 3: Es ist durchaus möglich, dass eine differenzierbare Funktion stark oszilliert und in manchen Bereichen große Ableitungen hat, trotzdem aber keine großen Werte annimmt. Das umgekehrte Phänomen, dass nämlich trotz kleiner Ableitung die Funktionswerte auf einem Intervall beliebig weit auseinanderlaufen, wird aber durch den Mittelwertsatz ausgeschlossen. In dieser Aufgabe soll das durch Beispiele belegt bzw. der theoretische Hintergrund präzisiert werden.

Teilaufgabe A: Geben Sie eine Formel für ein differenzierbares $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ an, dessen Werte durch $|f(x)| \leq 1$ für alle $x \in [-1, 1]$ beschränkt sind, das aber an einer geeigneten Stelle $x_0 \in (-1, 1)$, die anzugeben ist, eine Ableitung $f'(x_0) \geq 10$ hat.

$f(x) = \ldots$

$x_0 = \ldots$

Teilaufgabe B: Skizzieren Sie Ihre Funktion f aus Teilaufgabe A.

Teilaufgabe C: Formulieren Sie den Mittelwertsatz der Differentialrechnung und illustrieren Sie ihn mit einer Skizze.

Teilaufgabe D: Begründen Sie mit Hilfe des Mittelwertsatzes der Differentialrechnung (siehe Teilaufgabe C), warum es kein differenzierbares $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ gibt mit $f(1) - f(-1) \geq 10$ und gleichzeitig $|f'(x)| \leq 1$ für alle $x \in [-1, 1]$.

Aufgabe 4: In dieser Aufgabe geht es um Stammfunktionen und Integration.

Teilaufgabe A: Angenommen, für die beiden differenzierbaren Funktionen $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei eine Stammfunktion F von f und eine Stammfunktion H von $h := Fg'$ bekannt. Wie lässt sich daraus eine Stammfunktion P der Produktfunktion $p := fg$ berechnen? Begründen Sie Ihre Antwort, indem Sie mit Hilfe der Produktregel fürs Differenzieren die Probe durchführen.

$P(x) = \ldots$

Probe: $P'(x) = \ldots$

Teilaufgabe B: Berechnen Sie eine Stammfunktion P von $p(x) := e^{-x}x$.

$P(x) = \ldots$

Teilaufgabe C: Wo hat die Funktion p aus Teilaufgabe B ein lokales Extremum? Tragen Sie dieses in einer Skizze von p im Bereich $[-1, 3]$ ein und schraffieren Sie die Fläche, deren Inhalt durch $\int_0^2 p(x)\,dx$ gegeben ist.

Teilaufgabe D: Konvergiert das uneigentliche Integral

$$\int_0^\infty e^{-x}x\,dx = \lim_{b\to\infty} \int_0^b e^{-x}x\,dx$$

gegen einen endlichen Wert? Wenn ja, geben Sie diesen an; wenn nein, begründen Sie dies.

Raum für Nebenrechnungen und sonstige Notizen, die bei der Beurteilung ignoriert werden.

Raum für Nebenrechnungen und sonstige Notizen, die bei der Beurteilung ignoriert werden.