Mathematik 1 für Bauingenieure

Prüfung am 4.12.2015
Reinhard Winkler

Name (bitte ausfüllen):

Matrikelnummer (bitte ausfüllen):

Wichtige Hinweise bevor Sie beginnen:

- Die Prüfung besteht aus vier Aufgaben 1,2,3,4, untergliedert in jeweils vier Teilaufgaben A,B,C,D. Zu jeder Teilaufgabe wird maximal ein Punkt vergeben. Ab 8 von 16 möglichen Punkten ist Ihnen eine positive Note sicher.
- Die Arbeitszeit beträgt 90 Minuten.
- Wenn in der Angabe nicht ausdrücklich anders vermerkt, wird zu jeder Teilaufgabe der Punkt (oder Teile eines Punktes) ausschließlich für das vergeben, was Sie unmittelbar neben bzw. unterhalb der Angabe dieser Teilaufgabe niedergeschrieben haben (und nicht unterhalb der horizontalen Trennlinie zur nächsten Teilaufgabe).

  In den meisten Fällen sollte der jeweils vorgesehene Platz für die Lösung der Aufgabe ausreichen. Es lohnt daher, wenn Sie, bevor Sie mit dem Schreiben beginnen, sich vergewissern, dass Sie Ihre Antwort entsprechend kurz fassen können. Sollten Sie längere Nebenrechnungen oder sonstige schriftliche Überlegungen durchführen wollen, stehen Ihnen dafür die beiden letzten Blätter dieses Heftes zur Verfügung. Was immer Sie auf den letzten beiden Blättern notieren, wird bei der Punkteauswertung ignoriert.
- Wenn Sie sich noch vor Ausführung der Details einen Überblick darüber verschaffen, was in den einzelnen Aufgaben und ihren Teilen zu tun ist, kann das hilfreich für eine kluge Zeiteinteilung sein.

Nur vom Prüfer auszufüllen:

Punkte für Aufgabe 1: Aufgabe 2: Aufgabe 3: Aufgabe 4:

Gesamtpunktezahl:

Note:

Sonstige Bemerkungen:

Aufgabe 1: Für die komplexe Zahl z gelte $z = a + bi = re^{i\varphi}$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ sowie $\varphi = \frac{\pi}{6}$ und $r = 2$.

Teilaufgabe A: Für die gegebenen Zahlenwerte sind a und b Wurzeln rationaler Zahlen oder sogar selbst rational. Geben Sie diese beiden Zahlen a und b in möglichst einfacher Form an.

$a = \dots$

$b = \dots$

Teilaufgabe B: Geben Sie die kleinste natürliche Zahl $n > 0$ mit $z^n \in \mathbb{R}$ an.

$n = \dots$

Teilaufgabe C: Geben Sie reelle Zahlen φ_0 und $r_0 > 0$ an, so dass $z_0^3 = z$ gilt, wenn man $z_0 = r_0 e^{i\varphi_0}$ setzt.

$r_0 = \dots$

$\varphi_0 = \dots$

Teilaufgabe D: Neben der Zahl z_0 aus Teilaufgabe C gibt es noch zwei weitere komplexe Zahlen z_1 und z_2 mit $z_1^3 = z_2^3 = z$. Skizzieren Sie die komplexe Zahlenebene und tragen Sie sowohl z als auch z_0, z_1 und z_2 ein.

Aufgabe 2: Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei stetig, und die Folge der Funktionen $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $n = 1, 2, \ldots$, sei definiert durch $f_n(x) := f(\frac{x}{n})$.

Teilaufgabe A: Schreiben Sie ausführlich an, was es definitionsgemäß bedeutet, dass f an der Stelle 0 stetig ist.

Teilaufgabe B: Begründen Sie, warum die Funktionenfolge der f_n gegen eine konstante Funktion mit einem Wert $c \in \mathbb{R}$ konvergiert und geben Sie an, wie c von f abhängt.

Teilaufgabe C: Sei nun speziell $f(x) = x^2$. Fertigen Sie eine Skizze mit den Funktionen f_n für $n = 1, 2, 4, 10$ auf dem Bereich $[-2, 2]$ an.

Teilaufgabe D: Die f_n aus Teilaufgabe C konvergieren nicht gleichmäßig auf ganz $\mathbb{R}$ aber auf gewissen Teilmengen $T \subseteq \mathbb{R}$, zum Beispiel auf $T = [-2, 2]$, nicht aber auf $T = \mathbb{Q}$. Kreuzen Sie zu den angegebenen Eigenschaften an, ob gleichmäßige Konvergenz der f_n nie (d.h. auf keiner Menge $T \subseteq \mathbb{R}$ mit dieser Eigenschaft), manchmal (d.h. auf manchen aber nicht allen solchen T) oder immer (d.h. auf allen solchen $T \subseteq \mathbb{R}$) herrscht.

unendlich:	◦ nie	◦ manchmal	◦ immer
endlich:	◦ nie	◦ manchmal	◦ immer
unbeschränkt:	◦ nie	◦ manchmal	◦ immer
enthält die Zahl 0:	◦ nie	◦ manchmal	◦ immer
beschränkt:	◦ nie	◦ manchmal	◦ immer

Aufgabe 3: In dieser Aufgabe geht es um Ableitungen und Umkehrfunktionen.

Teilaufgabe A: Wie ist die Ableitung $f'(x_0)$ einer reellen Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ an einem Punkt $x_0 \in D$ definiert?

$f'(x_0) := \ldots$

Teilaufgabe B: Angenommen $f : A \to B$ mit $A, B \subseteq \mathbb{R}$ ist eine Funktion, zu der es eine Umkehrfunktion $g : B \to A$ gibt. Geben Sie für $h := g \circ f$, $h(x) = g(f(x))$ (die Komposition von f und g) den Definitionsbereich D, den Wertebereich W und den Funktionswert $h(x)$ für $x \in D$ an.

$D = \ldots$

$W = \ldots$

$h(x) = \ldots$

Teilaufgabe C: Angenommen $f : A \to B$ mit $A, B \subseteq \mathbb{R}$ ist eine differenzierbare reelle Funktion, zu der es eine gleichfalls differenzierbare Umkehrfunktion $g : B \to A$ gibt. Begründen Sie mit Hilfe der Kettenregel und Teilaufgabe B, warum für jedes $x \in A$ die Beziehung $f'(x) = \frac{1}{g'(f(x))}$ gilt.

Teilaufgabe D: In der Situation von Teilaufgabe C sei $A = (0, \infty)$ und $f(x) = x^\alpha$ mit einem $\alpha \in \mathbb{R}$. Dann gibt es ein $\beta \in \mathbb{R}$ mit $g(x) = x^\beta$. Wie errechnet sich β aus α?

$\beta = \ldots$

Aufgabe 4: In dieser Aufgabe geht es um Stammfunktionen und Integration. Angenommen $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ist eine stetige Funktion. Dann ist auf $[a, b]$ auch die Funktion $F(x) := \int_a^x f(t)\,dt$ definiert.

Teilaufgabe A: Sei $a < x_0 < b$. Dann lässt sich der Differentialquotient von F an der Stelle x_0 schreiben in der Form $\lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \int_\alpha^\beta f(t)\,dt$. Was sind dabei die korrekten (eventuell von h abhängigen) Grenzen α und β?

$\alpha = \ldots$

$\beta = \ldots$

Teilaufgabe B: Sei $\varepsilon > 0$. Weil f stetig ist, gibt es eine Zahl $\delta > 0$ derart, dass an allen Stellen x mit $x_0 - \delta < x < x_0 + \delta$ der Funktionswert $f(x)$ von $f(x_0)$ um weniger als ε abweicht, genauer: $f(x_0) - \varepsilon < f(x) < f(x_0) + \varepsilon$. Folglich gilt für das Integral $I(h) = \int_{x_0}^{x_0+h} f(t)\,dt$, $h > 0$, die Ungleichung

$$h \cdot (f(x_0) - \varepsilon) \;=\; \int_{x_0}^{x_0+h} (f(x_0) - \varepsilon)\,dt \;<\; I(h) \;<\; \int_{x_0}^{x_0+h} (f(x_0) + \varepsilon)\,dt \;=\; h \cdot (f(x_0) + \varepsilon).$$

Division durch $h > 0$ liefert $f(x_0) - \varepsilon \;<\; \frac{1}{h} I(h) \;<\; f(x_0) + \varepsilon$. Beachtet man noch, dass $\varepsilon > 0$ beliebig nahe bei 0 liegen darf, so folgt $\lim_{h\to 0} \frac{1}{h} I(h) = f(x_0)$.

Damit haben wir einen wichtigen Satz bewiesen. Welchen? (Bezeichnung oder Formulierung)

Teilaufgabe C: Berechnen Sie das Integral $\int_1^4 \sqrt{t}\,dt$ unter Vewendung einer Stammfunktion F des Integranden.

Teilaufgabe D: In Teilaufgabe C haben Sie den Satz aus Teilaufgabe B verwendet. Was war f, was war F?

$f(x) = \ldots$

$F(x) = \ldots$

Raum für Nebenrechnungen und sonstige Notizen, die bei der Beurteilung ignoriert werden.

Raum für Nebenrechnungen und sonstige Notizen, die bei der Beurteilung ignoriert werden.