Mathematatik 1 für Bauingenieurwesen

Prüfung am 20.1.2017
Reinhard Winkler

Name (bitte ausfüllen):

Matrikelnummer (bitte ausfüllen):

Wichtige Hinweise bevor Sie beginnen:

- Die Prüfung besteht aus vier Aufgaben 1,2,3,4, untergliedert in jeweils vier Teilaufgaben A,B,C,D. Zu jeder Teilaufgabe wird maximal ein Punkt vergeben. Ab 8 von 16 möglichen Punkten ist Ihnen eine positive Note sicher.
- Die Arbeitszeit beträgt 90 Minuten.
- Wenn in der Angabe nicht ausdrücklich anders vermerkt, wird zu jeder Teilaufgabe der Punkt (oder Teile eines Punktes) ausschließlich für das vergeben, was Sie unmittelbar neben bzw. unterhalb der Angabe dieser Teilaufgabe niedergeschrieben haben (und nicht unterhalb der horizontalen Trennlinie zur nächsten Teilaufgabe). Drei Punkte ... symbolisieren, dass Sie an dieser Stelle beginnend Ihre Eintragung machen, ein kleiner Kreis ∘, dass Sie Zutreffendes ankreuzen sollen.

  In den meisten Fällen sollte der jeweils vorgesehene Platz für die Lösung der Aufgabe ausreichen. Es lohnt daher, wenn Sie, bevor Sie mit dem Schreiben beginnen, sich vergewissern, dass Sie Ihre Antwort entsprechend kurz fassen können. Sollten Sie längere Nebenrechnungen oder sonstige schriftliche Überlegungen durchführen wollen, stehen Ihnen dafür die beiden letzten Blätter dieses Heftes zur Verfügung. Was immer Sie auf den letzten beiden Blättern notieren, wird bei der Punkteauswertung ignoriert.
- Wenn Sie sich noch vor Ausführung der Details einen Überblick darüber verschaffen, was in den einzelnen Aufgaben und ihren Teilen zu tun ist, kann das hilfreich für eine kluge Zeiteinteilung sein.

Nur vom Prüfer auszufüllen:

Punkte für Aufgabe 1: Aufgabe 2: Aufgabe 3: Aufgabe 4:

Gesamtpunktezahl:

Note:

Sonstige Bemerkungen:

Aufgabe 1: Wir beschäftigen uns mit komplexen Zahlen z in ihrer Darstellung $z = a + ib$ mit Realteil $a \in \mathbb{R}$, Imaginärteil $b \in \mathbb{R}$ und imaginärer Einheit i, die durch $i^2 = -1$ gekennzeichnet ist. Die Polardarstellung sei in der Form $z = re^{i\varphi} = [r, \varphi]$ mit $r \geq 0$ und $\varphi \in \mathbb{R}$ notiert. Die konjugiert komplexe Zahl $\overline{z}$ ist bekanntlich durch $\overline{z} = a - ib = [r, -\varphi]$ definiert.

Teilaufgabe A: Überprüfen Sie die Regel, dass Multiplikation und Konjugation komplexer Zahlen vertauscht werden können, indem Sie für zwei komplexe Zahlen $z_1 = a_1 + ib_1$ und $z_2 = a_2 + ib_2$ den Realteil a und den Imaginärteil b von $\overline{z_1} \cdot \overline{z_2} = \overline{z_1 \cdot z_2} = a + ib$ berechnen.

$\overline{z_1} \cdot \overline{z_2} = \ldots$

$\overline{z_1 \cdot z_2} = \ldots$

Also: $a = \ldots$ und $b = \ldots$

Teilaufgabe B: Wie Teilaufgabe A, nur mit Hilfe der Polardarstellung, indem Sie für $z_1 = r_1 e^{i\varphi_1}$ und $z_2 = r_2 e^{i\varphi_2}$ die Polarkoordinaten r und φ von $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2} = re^{i\varphi}$ berechnen.

$\overline{z_1} \cdot \overline{z_2} = \ldots$

$\overline{z_1 \cdot z_2} = \ldots$

Also: $r = \ldots$ und $\varphi = \ldots$

Teilaufgabe C: Ähnlich wie die Regel aus A und B gilt auch die Regel $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$, außerdem $\overline{z} = z$ sofern $z \in \mathbb{R}$. Hieraus folgt leicht $f(\overline{z}) = \overline{f(z)}$, sofern $f \in \mathbb{R}[x]$ ein Polynom mit reellen Koeffizienten ist. Begründen Sie damit, dass echt komplexe Nullstellen eines reellen Polynoms stets in Konjugiertenpaaren auftreten.

Teilaufgabe D: Sei $z = 1 + i$ eine komplexe Nullstelle des reellen Polynoms $f \in \mathbb{R}[x]$. Dann hat f einen reell irreduziblen quadratischen Faktor p der Form $p(x) = x^2 + \alpha x + \beta$ mit reellen Koeffizienten α, β. Berechnen Sie p und damit α und β. Hinweis: Verwenden Sie Teilaufgabe C.

$p(x) = \ldots$

Also: $\alpha = \ldots$ und $\beta = \ldots$

Aufgabe 2: Behauptung: *Alle Zahlen* $a_n := n(n+1)(n+2)$ *mit* $n \in \mathbb{N}$ *sind durch* 6 *teilbar.* Diese Behauptung soll nun an Beispielen überprüft, sodann auch allgemein bewiesen werden.

Teilaufgabe A: Überprüfen Sie die Behauptung für $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5$, indem Sie a_n und jenes $b_n \in \mathbb{N}$ mit $a_n = 6b_n$ angeben.

$a_0 = \dots$ $b_0 = \dots$ $a_1 = \dots$ $b_1 = \dots$ $a_2 = \dots$ $b_2 = \dots$

$a_3 = \dots$ $b_3 = \dots$ $a_4 = \dots$ $b_4 = \dots$ $a_5 = \dots$ $b_5 = \dots$

Teilaufgabe B: Es soll nun die etwas schwächere Behauptung bewiesen werden, dass alle a_n durch 3 teilbar sind. Dazu dividieren wir n durch 3 mit einem Rest $r \in \{0, 1, 2\}$, also $n = 3k + r$ mit $k \in \mathbb{N}$. Ist $r = 0$, so folgt $a_n = n(n + 1)(n + 2) = 3k(3k + 1)(3k + 2) = 3c_n$ mit $c_n = k(3k + 1)(3k + 2) \in \mathbb{N}$, also ist a_n tatsächlich ein Vielfaches von 3. Ähnlich erhält man für $r = 1$ die Darstellung $a_n = (3k + 1)(3k + 2)(3k + 3) = 3c_n$ mit $c_n = (3k + 1)(3k + 2)(k + 1)$. Auch im dritten Fall $n = 3k+2$ gilt $a_n = 3c_n$ mit einem geeigneten $c_n \in \mathbb{N}$. Ermitteln Sie dieses c_n:

$a_n = \dots$

Also ist $c_n = \dots$

Teilaufgabe C: Von zwei aufeinander folgenden natürlichen Zahlen ist eine gerade, also durch 2 teilbar. Damit ist erst recht jedes $a_n = n(n + 1)(n + 2)$ durch 2 teilbar. Weil a_n also durch die teilerfremden Zahlen 2 und (laut Teilaufgabe B) 3 teilbar ist, muss a_n sogar durch deren Produkt $2 \cdot 3 = 6$ teilbar sein. In diesem Argument verbirgt sich ein sehr wichtiger Satz über die multiplikative Zerlegung natürlicher Zahlen > 0. Formulieren Sie diesen Satz:

Teilaufgabe D: Ein alternativer Beweis für die Behauptung, dass a_n für alle $n \in \mathbb{N}$ durch 6 teilbar ist, ergibt sich aus dem Induktionsprinzip. Ergänzen Sie die fehlenden Teile des folgenden Induktionsbeweises nach n:

Induktionsanfang: …

Die Induktionsannahme lautet: …

Die Induktionsbehauptung lautet: …

Induktionsschritt: Laut Induktionsannahme ist $a_n = 6b_n$, $b_n \in \mathbb{N}$, ein Vielfaches von 6. Als Produkt zweier aufeinanderfolgender Zahlen ist $(n+1)(n+2)$ gerade, lässt sich also als $(n+1)(n+2) = 2d_n$ mit $d_n \in \mathbb{N}$ schreiben. Folglich ist die Differenz $a_{n+1} - a_n = (n + 1)(n + 2)(n + 3) - n(n+1)(n+2) = (n+1)(n+2)(n+3-n) = 3(n+1)(n+2) = 6d_n$ durch 6 teilbar. Daraus folgt:

$a_{n+1} = a_n + (a_{n+1} - a_n) = \dots$

Somit ist $a_{n+1} = 6b_{n+1}$ mit $b_{n+1} = \dots$

Aufgabe 3: In dieser Aufgabe wird die Funktion $f(x) := \frac{1}{1-x^2}$ untersucht.

Teilaufgabe A: Definieren Sie, was es für eine beliebige reelle Funktion $g : D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}$, bedeutet, streng monoton wachsend zu sein, und begründen Sie in mehreren Schritten, warum obige Funktion f auf dem Intervall $[0, 1)$ diese Eigenschaft hat.

g ist streng monoton wachsend, wenn für alle ...

f ist auf $[0, 1)$ streng monoton wachsend, denn: ...

Teilaufgabe B: Geben Sie den maximalen Definitionsbereich D der Funktion f an und beschreiben Sie die Mengen M^+ und M^-, wo f positive bzw. negative Werte annimmt.

$D = \dots$

$M^+ = \dots$

$M^- = \dots$

Teilaufgabe C: Die Funktion f ist gerade. Erklären Sie, was das bedeutet. Verwenden Sie die bisherigen Erkenntnisse über f, um ohne den Einsatz von Differentialrechnung auf die einzige relative (lokale) Extremstelle x_0 von f zu schließen. Von welcher Art (Minimum oder Maximum?) ist sie, und welchen Wert $f(x_0)$ nimmt f dort an?

Dass f gerade ist, bedeutet: ...

Bei $x_0 = \dots$ liegt ein lokales ○ Minimum ○ Maximum von f vor.

$f(x_0) = \dots$

Teilaufgabe D: Skizzieren Sie die Funktion f. Dabei sollen folgende Merkmale (sofern vorhanden) deutlich erkennbar sein: asymptotisches Verhalten für $x \to \infty$ und $x \to -\infty$, Polstellen, Nullstellen, lokale Extremstellen, lokales Monotonieverhalten.

Aufgabe 4: Gegeben ist die Funktion $f(x) := x^2 - 3$.

Teilaufgabe A: Ermitteln Sie die Ableitung f' von f und die Gleichung der Tangente $t_{x_0} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ an f im Punkt $(x_0, f(x_0))$ für $x_0 = 2$.

$f'(x) = \ldots$

$t_{x_0}(x) = t_2(x) = \ldots$

Teilaufgabe B: Ermitteln Sie die Nullstelle x_1 der Tangente $t_{x_0} = t_2$ aus Teilaufgabe A und illustrieren Sie die Situation mit einer möglichst sorgfältigen Skizze.

$x_1 = \ldots$ Skizze: ...

Falls Sie eine Nebenrechnung
durchführen wollen,
tun Sie es hier auf der linken Seite,
damit rechts genügend Platz
für die Skizze bleibt: ...

Teilaufgabe C: Geben Sie eine Funktion $T : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ an mit folgender Eigenschaft: Jedem Wert $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ wird als $T(x)$ die Nullstelle der Tangente t_x an f im Punkt $(x, f(x))$ zugeordnet.

Eventuelle Nebenrechnung (falls erforderlich):

Also ist $T(x) = \ldots$

Teilaufgabe D: Gegen welchen Wert konvergiert die rekursiv definierte Folge $x_{n+1} := T(x)$ mit $x_0 = 2$ und T aus Teilaufgabe C?

Eventuelle Nebenrechnung:

Also ist $\lim_{n\to\infty} x_n = \ldots$

Raum für Nebenrechnungen und sonstige Notizen, die bei der Beurteilung ignoriert werden.

Raum für Nebenrechnungen und sonstige Notizen, die bei der Beurteilung ignoriert werden.