Mathematik 1 für Bauingenieure

Prüfung am 3.3.2017
Reinhard Winkler

Name (bitte ausfüllen):

Matrikelnummer (bitte ausfüllen):

Wichtige Hinweise bevor Sie beginnen:

- Die Prüfung besteht aus vier Aufgaben 1,2,3,4, untergliedert in jeweils vier Teilaufgaben A,B,C,D. Zu jeder Teilaufgabe wird maximal ein Punkt vergeben. Ab 8 von 16 möglichen Punkten ist Ihnen eine positive Note sicher.
- Die Arbeitszeit beträgt 90 Minuten.
- Wenn in der Angabe nicht ausdrücklich anders vermerkt, wird zu jeder Teilaufgabe der Punkt (oder Teile eines Punktes) ausschließlich für das vergeben, was Sie unmittelbar neben bzw. unterhalb der Angabe dieser Teilaufgabe niedergeschrieben haben (und nicht unterhalb der horizontalen Trennlinie zur nächsten Teilaufgabe).

  In den meisten Fällen sollte der jeweils vorgesehene Platz für die Lösung der Aufgabe ausreichen. Es lohnt daher, wenn Sie, bevor Sie mit dem Schreiben beginnen, sich vergewissern, dass Sie Ihre Antwort entsprechend kurz fassen können. Sollten Sie längere Nebenrechnungen oder sonstige schriftliche Überlegungen durchführen wollen, stehen Ihnen dafür die beiden letzten Blätter dieses Heftes zur Verfügung. Was immer Sie auf den letzten beiden Blättern notieren, wird bei der Punkteauswertung ignoriert.
- Wenn Sie sich noch vor Ausführung der Details einen Überblick darüber verschaffen, was in den einzelnen Aufgaben und ihren Teilen zu tun ist, kann das hilfreich für eine kluge Zeiteinteilung sein.

Nur vom Prüfer auszufüllen:

Punkte für Aufgabe 1: Aufgabe 2: Aufgabe 3: Aufgabe 4:

Gesamtpunktezahl:

Note:

Sonstige Bemerkungen:

Aufgabe 1: In dieser Aufgabe geht es um Eigenschaften von Funktionen (Abbildungen), sowohl allgemein als auch speziell auf reelle Funktionen bezogen.

Teilaufgabe A: Wann nennt man eine Funktion $f : A \to B$ injektiv? (Definition)

Begründen Sie, warum die Funktion $g \circ f : A \to C$ injektiv ist, sofern sowohl $f : A \to B$ als auch $g : B \to C$ injektiv sind. Hinweis: Vergleichen Sie mit Teilaufgabe B.

Teilaufgabe B: In der folgenden Argumentation kommt an zwei Stellen eine Eigenschaft E von Funktionen vor. Sie sollen diese Eigenschaft E benennen (Bezeichnung genügt) und jene Implikation (wenn-dann-Aussage) formulieren, die damit bewiesen worden ist:

Sei $c \in C$ beliebig. Wenn die Funktion $g : B \to C$ die Eigenschaft E hat, gibt es ein $b \in B$ mit $g(b) = c$. Wenn auch die Funktion $f : A \to B$ die Eigenschaft E hat, gibt es ein $a \in A$ mit $f(a) = b$. Für dieses a gilt $(g \circ f)(a) = g(f(a)) = g(b) = c$.

E: ...

Damit ist folgende Aussage bewiesen:

Teilaufgabe C: Ist die reelle Funktion f auf einem Intervall I nicht monoton, so gibt es $a < b < c \in I$ mit $f(a) < f(b)$ und $f(c) < f(b)$ (Fall 1) oder mit $f(a) > f(b)$ und $f(c) > f(b)$ (Fall 2). Kann so ein f sowohl stetig als auch injektiv sein?

○ Ja ○ Nein

Begründung mit Skizze für Fall 1: ...

Teilaufgabe D: Sei $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit einer Umkehrfunktion g, die $g(x + y) = g(x)g(y)$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$ erfüllt. (Achtung: f und g nicht verwechseln!)

Gibt es eine solche Funktion f, die außerdem $f(2) = 1$ erfüllt? Wenn ja, welche? Wenn nein, warum nicht?

○ Ja, nämlich: $f = \ldots$ ○ Nein, denn ...

Gibt es eine solche Funktion f, die außerdem $f(1) = 2$ erfüllt? Wenn ja, welche? Wenn nein, warum nicht?

○ Ja, nämlich: $f = \ldots$ ○ Nein, denn ...

Aufgabe 2: Für eine konvergente reelle Folge $\mathbf{a} = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\lim_{n\to\infty} a_n = x$ und $\varepsilon > 0$ bezeichne $n_0(\mathbf{a}, \varepsilon)$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit: $\forall n \geq n_0$ gilt $|a_n - x| < \varepsilon$. In dieser Aufgabe befassen wir uns mit Grenzwertbeziehungen zwischen Folgen $\mathbf{a} = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $\mathbf{b} = (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $\mathbf{c} = (c_n)_{n\in\mathbb{N}}$. So wie bei Aufgabe 1 (A und B) kann es auch hier helfen, gewisse Teilaufgaben zu vergleichen.

Teilaufgabe A: Angenommen $c_{2n} = a_n$ und $c_{2n+1} = b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Angenommen $\mathbf{a}$ konvergiert gegen x und $\mathbf{b}$ konvergiert gegen y. Auf welche Beziehung zwischen x und y kommt es an, damit $\mathbf{c}$ konvergiert? Wie lässt sich in diesem Fall ein $n_0(\mathbf{c}, \varepsilon)$ gewinnen, wenn man ein $n_0(\mathbf{a}, \varepsilon)$ und ein $n_0(\mathbf{b}, \varepsilon)$ kennt?

$\mathbf{c}$ konvergiert genau dann, wenn ...

In diesem Fall kann man zum Beispiel nehmen: $n_0(\mathbf{c}, \varepsilon) = \ldots$

Teilaufgabe B: Diesmal sei $c_n = a_n b_n$. Konvergiert $\mathbf{a}$ gegen x und $\mathbf{b}$ gegen y, dann sind $\mathbf{a}$ und $\mathbf{b}$ beschränkt durch ein $r \in \mathbb{R}$ mit $|a_n| < r$ und $|b_n| < r$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Ist sowohl $n \geq n_0(\mathbf{a}, \frac{\varepsilon}{2r})$ als auch $n \geq n_0(\mathbf{b}, \frac{\varepsilon}{2r})$, so gilt:

$$|a_n b_n - xy| = |a_n b_n - a_n y + a_n y - xy| \leq |a_n| \cdot |b_n - y| + |a_n - x| \cdot |y| < r \cdot \frac{\varepsilon}{2r} + \frac{\varepsilon}{2r} \cdot r = \varepsilon$$

Für ein beliebig vorgegebenes $\varepsilon > 0$ kann man also

$$n_0(\mathbf{c}, \varepsilon) = n_0((a_n b_n), \varepsilon) := \max\left\{n_0(\mathbf{a}, \frac{\varepsilon}{2r}), n_0(\mathbf{a}, \frac{\varepsilon}{2r})\right\}$$

setzen. Formulieren Sie jenen Grenzwertsatz für Folgen, der damit bewiesen ist:

Teilaufgabe C: Diesmal sei $c_n = a_n + b_n$. Bekanntlich konvergiert die Folge mit den Gliedern $c_n = a_n + b_n$ gegen den Grenzwert $x + y$, sofern $\mathbf{a}$ gegen $x \in \mathbb{R}$ und $\mathbf{b}$ gegen $y \in \mathbb{R}$ konvergiert. Man kann das beweisen, indem man zu einem beliebigen $\varepsilon > 0$ zeigt, wie man ein $n_0(\mathbf{c}, \varepsilon)$ aus geeigneten $n_0(\mathbf{a}, \varepsilon_1)$ und $n_0(\mathbf{b}, \varepsilon_2)$ errechnen kann. Die (zu der in Teilaufgabe B ähnliche, aber einfachere) Ungleichungskette

$$|(a_n + b_n) - (x + y)| = |(a_n - x) + (b_n - y)| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

zeigt erstens, welche Werte für ε_1 und ε_2 man zweckmäßig wählen kann, und zweitens, wie sich daraus $n_0(\mathbf{c}, \varepsilon) = n_0((a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}}, \varepsilon)$ ergibt:

$\varepsilon_1 = \ldots$ $\qquad\qquad$ $\varepsilon_2 = \ldots$

$n_0(\mathbf{c}, \varepsilon) = \ldots$

Teilaufgabe D: Ähnlich wie für Summen und Produkte gilt auch ein Grenzwertsatz für Quotienten. Allerdings muss man die Formulierung geringfügig modifizieren. Geben Sie eine korrekte Formulierung des Grenzwertsatzes für Quotienten:

Aufgabe 3: In dieser Aufgabe spielen die Funktionen $f_1 : D_1 \to \mathbb{R}$ und $f_2 : D_2 \to \mathbb{R}$ sowie deren Summe $s : D_s \to \mathbb{R}$ und Produkt $p : D_p \to \mathbb{R}$ die Hauptrolle:

$$f_1(x) := \frac{1}{1-x}, \quad f_2(x) := \frac{1}{1+x}$$

und

$$s(x) := f_1(x) + f_2(x) = \frac{1+x+1-x}{(1-x)(1+x)} = \frac{2}{(1-x)(1+x)} = \frac{2}{1-x^2} = 2p(x)$$

Teilaufgabe A: Geben Sie die maximalen Definitionsbereiche von f_1, f_2, s und p an:

$D_1 = \ldots$ $\qquad$ $D_2 = \ldots$ $\qquad$ $D_s = \ldots$ $\qquad$ $D_p = \ldots$

Teilaufgabe B: Die Formel für die geometrische Reihe lässt sich auch so formulieren: Die Funktion f_1 hat für $-1 < x < 1$ die Potenzreihendarstellung

$$f_1(x) = \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

mit den Gliedern $a_n = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Wie lauten die Glieder b_n, so dass

$$f_2(x) = \frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$$

für alle $x \in (-1, 1)$ gilt?

$b_n = \ldots$

Teilaufgabe C: Sei $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ das Cauchyprodukt der Reihen für f_1 und f_2. Ermitteln Sie aus der allgemeinen Definition des Cauchyproduktes zweier Potenzreihen und den konkreten a_n und b_n aus Teilaufgabe B die Koffizienten c_n. Unterscheiden Sie die beiden Fälle: gerades $n = 2k$ bzw. ungerades $n = 2k + 1$.

Aus der Nebenrechnung ...
folgt
$c_n = c_{2k} = \ldots$ $\qquad$ $c_n = c_{2k+1} = \ldots$

Teilaufgabe D: Seien die Glieder d_n dadurch gegeben, dass

$$s(x) = f_1(x) + f_2(x) = 2p(x) = \frac{2}{1-x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} d_n x^n$$

für alle $x \in (-1, 1)$ gilt. Welche Beziehung (Gleichung) besteht zwischen den c_n und den d_n, und was ist der konkrete Wert der d_n?

Die Beziehung zwischen den c_n und d_n lautet: ...

$d_n = d_{2k} = \ldots$ $\qquad$ $d_n = d_{2k+1} = \ldots$

Aufgabe 4: Für $a < b$ und positive $n \in \mathbb{N}$ betrachten wir die Zerlegungen

$$Z_n = \{a = x_0(n) \leq x_1(n) \leq \ldots \leq x_n(n) = b\}$$

des Intervalls $[a, b]$ in n gleich lange Teile, also mit $x_i(n) = a + \frac{i}{n}(b-a)$ für $i = 0, 1, \ldots, n$. Für die Funktion $f(x) := x$ betrachten wir erstens das Integral $I = \int_a^b f(x)\,dx$, zweitens die Obersummen $O(f, Z_n)$, drittens die Untersummen $U(f, Z_n)$ und viertens die Riemannsummen $S(f, Z_n, B_n)$ zu den Belegungen $B_n = \{\xi_1(n), \ldots, \xi_n(n)\}$, $\xi_i(n) = \frac{x_{i-1}(n)+x_i(n)}{2}$, $i = 1, \ldots, n$.

Manchmal ist es nützlich, folgende drei Fälle zu unterscheiden: $0 \leq a < b$ (Fall 1), $a < 0 \leq b$ (Fall 2) und $a < b < 0$ (Fall 3).

Teilaufgabe A: Welche geometrische Interpretation hat das Integral I? Skizzieren Sie die Situation für Fall 1 ($0 \leq a < b$) und leiten Sie für diesen mittels elementargeometrischer Überlegungen eine Formel für I ab. (Diese muss natürlich von a und b abhängen.)

Teilaufgabe B: Skizzieren Sie für Fall 1 die geometrische Interpretation von Ober- und Untersumme und bestimmen Sie daraus deren Differenz, ohne die Summen selbst zu berechnen.

Teilaufgabe C: Berechnen Sie für $a = 0$ und allgemeines b, also $x_i(n) = \frac{ib}{n}$ und $\xi_i(n) = \frac{(2i+1)b}{2}n$ die Riemannsumme

$$S(f, Z_n, B_n) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i(n))(x_i(n) - x_{i-1}(n)) = \sum_{i=1}^{n} \frac{(2i+1)b}{2n}\frac{b}{n} = \frac{b^2}{2n^2}\sum_{i=1}^{n}(2i+1) = \frac{b^2}{2n^2}s_n$$

mit $s_n := \sum_{i=1}^{n}(2i+1)$. Zumindest zwei Wege bieten sich an: Erstens, Sie finden eine Formel für die s_n, die Sie mittels Induktion beweisen. (Sie können dazu die Rückseite des Blattes oder eines der Extrablätter verwenden.) Oder Sie überlegen sich elementargeometrisch eine Beziehung zwischen der Riemannsumme $S(f, Z_n, B_n)$ und dem Integral $\int_0^b f(x)\,dx$ aus Teilaufgabe A.

Teilaufgabe D: Erklären Sie am Beispiel des Integrals $\int_a^b f(x)\,dx$, wie man den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung für seine Berechnung einsetzt, und führen Sie diese durch.

Raum für Nebenrechnungen und sonstige Notizen, die bei der Beurteilung ignoriert werden.

Raum für Nebenrechnungen und sonstige Notizen, die bei der Beurteilung ignoriert werden.