Mathematik 1 für Bauingenieurwesen

Prüfung am 5.5.2017
Reinhard Winkler

Name (bitte ausfüllen):

Matrikelnummer (bitte ausfüllen):

Wichtige Hinweise bevor Sie beginnen:

- Die Prüfung besteht aus vier Aufgaben 1,2,3,4, untergliedert in jeweils vier Teilaufgaben A,B,C,D. Zu jeder Teilaufgabe wird maximal ein Punkt vergeben. Ab 8 von 16 möglichen Punkten ist Ihnen eine positive Note sicher.
- Die Arbeitszeit beträgt 90 Minuten.
- Wenn in der Angabe nicht ausdrücklich anders vermerkt, wird zu jeder Teilaufgabe der Punkt (oder Teile eines Punktes) ausschließlich für das vergeben, was Sie unmittelbar neben bzw. unterhalb der Angabe dieser Teilaufgabe niedergeschrieben haben (und nicht unterhalb der horizontalen Trennlinie zur nächsten Teilaufgabe). Drei Punkte ... symbolisieren, dass Sie an dieser Stelle beginnend Ihre Eintragung machen, ein kleiner Kreis ◦, dass Sie Zutreffendes ankreuzen sollen.

  In den meisten Fällen sollte der jeweils vorgesehene Platz für die Lösung der Aufgabe ausreichen. Es lohnt daher, wenn Sie, bevor Sie mit dem Schreiben beginnen, sich vergewissern, dass Sie Ihre Antwort entsprechend kurz fassen können. Sollten Sie längere Nebenrechnungen oder sonstige schriftliche Überlegungen durchführen wollen, stehen Ihnen dafür die beiden letzten Blätter dieses Heftes zur Verfügung. Was immer Sie auf den letzten beiden Blättern notieren, wird bei der Punkteauswertung ignoriert.
- Wenn Sie sich noch vor Ausführung der Details einen Überblick darüber verschaffen, was in den einzelnen Aufgaben und ihren Teilen zu tun ist, kann das hilfreich für eine kluge Zeiteinteilung sein.

Nur vom Prüfer auszufüllen:

Punkte für Aufgabe 1: Aufgabe 2: Aufgabe 3: Aufgabe 4:

Gesamtpunktezahl:

Note:

Sonstige Bemerkungen:

Aufgabe 1: In dieser Aufgabe geht es um Folgen und ihre Grenzwerte, zuletzt auch um die aus ihnen gebildeten Partialsummen. Konvergieren die a_n gegen $x \in \mathbb{R}$ und ist $\varepsilon > 0$, so sei mit $n_0(\varepsilon, (a_n)) \in \mathbb{N}$ eine Zahl bezeichnet, so dass für alle $n \geq n_0(\varepsilon, (a_n))$ die Beziehung $|a_n - x| < \varepsilon$ gilt. (So ein $n_0(\varepsilon, (a_n))$ existiert nach Definition des Grenzwerts.)

Teilaufgabe A: Die Folge mit den Gliedern $a_n = \frac{4n+1}{2n-1}$ konvergiert gegen einen Grenzwert $x \in \mathbb{R}$. Bestimmen Sie x und stellen Sie a_n in der Gestalt $a_n = x + b_n$ mit $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$ dar.

$x = \ldots$, $\qquad a_n = \frac{4n+1}{2n-1} = \ldots \qquad = x + b_n$, $\qquad$ also $b_n = \ldots$

Teilaufgabe B: Geben Sie für die a_n aus Teilaufgabe A eine Formel für ein $n_0(\varepsilon, (a_n))$ in Abhängigkeit von $\varepsilon > 0$ an. Hinweis: Verwenden Sie die Darstellung $a_n = x + b_n$ aus Teilaufgabe A und formen Sie um.

Umformung: ...

Also kann zum Beispiel $n_0(\varepsilon, (a_n)) = \ldots$ genommen werden.

Teilaufgabe C: Angenommen zwei Folgen mit den Gliedern x_n bzw. y_n sind gegeben und eine weitere Folge sei durch $z_{2n} := x_n$ sowie $z_{2n+1} := y_n$ definiert. Weil Teilfolgen einer konvergenten Folge stets wieder konvergent gegen denselben Grenzwert sind, kann die Folge der z_n nur dann gegen ein $\alpha \in \mathbb{R}$ konvergieren, wenn das sowohl für die Folge der x_n als auch für die der y_n gilt. Gilt auch die Umkehrung, d.h.: Folgt aus $\alpha = \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n \in \mathbb{R}$ stets auch $\alpha = \lim_{n\to\infty} z_n$? Begründen Sie Ihre Antwort. Im positiven Fall sind Sie fertig, wenn Sie angeben, wie man zu vorgegebenem $\varepsilon > 0$ aus $n_0(\varepsilon, (x_n))$ und $n_0(\varepsilon, (y_n))$ (wie sie wegen der Konvergenz der x_n und der y_n ja existieren) ein $n_0(\varepsilon, (z_n))$ erhalten kann. Im negativen Fall ist ein Gegenbeispiel anzugeben.

∘ Ja, zum Beispiel $n_0(\varepsilon, (z_n)) = \ldots$

∘ Nein, Gegenbeispiel: $\qquad x_n = \ldots\ldots \qquad$ und $\qquad y_n = \ldots\ldots$.

Teilaufgabe D: Für die nun von Ihnen anzustellenden Überlegungen kann es hilfreich sein, wenn Sie an das Leibnizkriterium für alternierende Reihen denken. Und zwar seien $s_n := \sum_{i=0}^{n} a_i$ die Partialsummen für Folgenglieder a_n, $n \in \mathbb{N}$.

Welche Voraussetzungen an die a_n sind hinreichend dafür, dass die s_{2n+1} eine monoton wachsende und die s_{2n} eine monoton fallende Folge bilden?

Antwort: Das ist der Fall, sofern ...

und ...

Unter welcher zusätzlichen Voraussetzung konvergieren diese beiden Folgen außerdem gegen denselben Grenzwert

$$s = \lim_{n\to\infty} s_{2n+1} = \lim_{n\to\infty} s_{2n} \in \mathbb{R}?$$

Antwort: Das ist der Fall, sofern ...

Aufgabe 2: In dieser Aufgabe geht es um ein Polynom $p(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$ dritten Grades.

Teilaufgabe A: Ist bekannt, dass alle Koeffizienten a_0, a_1, a_2, a_3 ganzzahlig sind, außerdem $a_0 = 2$ und $a_3 = 6$, dann gibt es sechs Zahlen $q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6 > 0$ derart, dass für jede rationale Nullstelle α von p entweder $\alpha = q_i$ oder $\alpha = -q_i$ gilt. Geben Sie diese q_i an.

$q_1 = \ldots\ldots$, $q_2 = \ldots\ldots$, $q_3 = \ldots\ldots$, $q_4 = \ldots\ldots$, $q_5 = \ldots\ldots$, $q_6 = \ldots\ldots$

Teilaufgabe B: Wir spezifizieren weiter $a_1 = -3$ und $a_2 = -5$, also $p(x) = 6x^3 - 5x^2 - 3x + 2$. Hat p ganzzahlige Nullstellen? Wenn ja, wieviele? Geben Sie diese an.

○ Nein, keine ganzzahligen Nullstellen

○ ja, $k = \ldots$ Stück, nämlich: …

Teilaufgabe C: Geben Sie ein Polynom $q(x)$ vom Grad ≤ 3 mit ganzzahligen Koeffizienten an, dessen Nullstellen genau die rationalen aber nicht ganzzahligen Nullstellen von p aus B sind.

Nebenrechnung: …

$q(x) = \ldots$

Teilaufgabe D: Bestimmen Sie die Nullstellen von q aus C.
Nebenrechnung: …

Die Nullstellen von q sind: …

Aufgabe 3: In dieser Aufgabe geht es um konvexe (positiv gekrümmte) reelle Funktionen wie zum Beispiel $x \mapsto x^2$ oder $x \mapsto e^x$ (im Gegensatz zu konkaven Funktionen wie zum Beispiel $x \mapsto \sqrt{x}$ oder $x \mapsto \ln x$).

Zur Reduktion der Schreibarbeit dürfen Sie (müssen Sie aber nicht) für eine Konvexkombination $ta + (1-t)b$ zweier Werte a und b zu einem Parameterwert $t \in [0,1]$ die Kurzschreibweise $x(a,b,t)$ verwenden.

Teilaufgabe A: Wie genau definiert man die Konvexität einer reellen Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$? Ergänzen Sie in der folgenden Definition die fehlende Ungleichung.

Für alle $a < b \in \mathbb{R}$ und alle $t \in [0,1]$ gilt die Ungleichung:

$$\ldots$$

Teilaufgabe B: Fertigen Sie eine Skizze an, die die Definition aus Teilaufgabe A illustriert.

Teilaufgabe C: Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zweimal differenzierbar. Dann ist f genau dann konvex, wenn die zweite Ableitung f'' eine bestimmte Eigenschaft hat. Welche?

Teilaufgabe D: Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenzierbar. Dann ist f genau dann konvex, wenn die Ableitung f' eine bestimmte Eigenschaft hat. Welche?

Aufgabe 4: In dieser Aufgabe geht es um die Hyperbelfunktionen

$$\cosh x := \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) \quad \text{und} \quad \sinh x := \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$$

und partielle Integration. Über die Exponentialfunktion $\exp(x) = e^x$ dürfen Sie sowohl Funktionalgleichung als auch Ableitungsregel verwenden, über die Hyperbelfunktionen aber nur obige Definition.

Teilaufgabe A: Rechnen Sie die Beziehung $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$ für beliebiges $x \in \mathbb{R}$ nach.

Teilaufgabe B: Rechnen Sie die Differentiationsregeln $\cosh' x = \sinh x$ und $\sinh' x = \cosh x$ nach. Auch hier dürfen Sie die Regel $\exp'(x) = (e^x)' = e^x$ verwenden.

Teilaufgabe C: Die Formel der sogenannten partiellen Integration eines Integranden, der sich als Produkt zweier Funktionen f und g schreiben lässt, lautet bekanntlich:

$$\int fg \, dx = Fg - \int Fg' \, dx + c.$$

Erklären Sie, was darin F und c bedeuten und überprüfen Sie diese Formel, indem Sie nachrechnen, dass die Ableitung rechts den Integranden links ergibt.

$F = \ldots$

$c = \ldots$

$(Fg - \int Fg' \, dx + c)' = \ldots$

Teilaufgabe D: Das unbestimmte Integral $I = \int \cosh^2 x \, dx$ lässt sich mit partieller Integration und einem ganz ähnlichen Trick berechnen wie $\int \cos^2 x \, dx$. Tun Sie das, indem Sie in Teilaufgabe C speziell $f = g = \cosh$ setzen und an geeigneten Stellen die Teilaufgaben A und B verwenden. Geben Sie auch an, was für F und g' aus Teilaufgabe C zu setzen ist.

$F = \ldots$ $\qquad\qquad$ $g' = \ldots$

Partielle Integration: $I = \int \cosh^2 x \, dx = \ldots$

Daraus folgt: ...

Raum für Nebenrechnungen und sonstige Notizen, die bei der Beurteilung ignoriert werden.

Raum für Nebenrechnungen und sonstige Notizen, die bei der Beurteilung ignoriert werden.