Mathematik 1 für Bauingenieurwesen

Prüfung am 16.6.2017
Reinhard Winkler

Name (bitte ausfüllen):

Matrikelnummer (bitte ausfüllen):

Wichtige Hinweise bevor Sie beginnen:

- Die Prüfung besteht aus vier Aufgaben 1,2,3,4, untergliedert in jeweils vier Teilaufgaben A,B,C,D. Zu jeder Teilaufgabe wird maximal ein Punkt vergeben. Ab 8 von 16 möglichen Punkten ist Ihnen eine positive Note sicher.
- Die Arbeitszeit beträgt 90 Minuten.
- Wenn in der Angabe nicht ausdrücklich anders vermerkt, wird zu jeder Teilaufgabe der Punkt (oder Teile eines Punktes) ausschließlich für das vergeben, was Sie unmittelbar neben bzw. unterhalb der Angabe dieser Teilaufgabe niedergeschrieben haben (und nicht unterhalb der horizontalen Trennlinie zur nächsten Teilaufgabe). Drei Punkte ... symbolisieren, dass Sie Ihre Eintragung an dieser Stelle machen bzw. beginnen, ein kleiner Kreis $\circ$, dass Sie Zutreffendes ankreuzen sollen.

  In den meisten Fällen sollte der jeweils vorgesehene Platz für die Lösung der Aufgabe ausreichen. Es lohnt daher, wenn Sie sich, bevor Sie mit dem Schreiben beginnen, vergewissern, dass Sie Ihre Antwort entsprechend kurz fassen können. Sollten Sie längere Nebenrechnungen oder sonstige schriftliche Überlegungen durchführen wollen, stehen Ihnen dafür die beiden letzten Blätter dieses Heftes zur Verfügung. Was immer Sie auf den letzten beiden Blättern notieren, wird bei der Punkteauswertung ignoriert.
- Wenn Sie sich noch vor Ausführung der Details einen Überblick darüber verschaffen, was in den einzelnen Aufgaben und ihren Teilen zu tun ist, kann das hilfreich für eine kluge Zeiteinteilung sein.

Nur vom Prüfer auszufüllen:

Punkte für Aufgabe 1: Aufgabe 2: Aufgabe 3: Aufgabe 4:

Gesamtpunktezahl:

Note:

Sonstige Bemerkungen:

Aufgabe 1: In dieser Aufgabe geht es um Vektorrechnung. Gegeben seien die beiden Vektoren $\mathbf{a} = (3, 2), \mathbf{b} = (-2, 2) \in \mathbb{R}^2$.

Teilaufgabe A: Skizzieren Sie diese beiden Vektoren $\mathbf{a}$ und $\mathbf{b}$ samt ihrer Summe $\mathbf{a}+\mathbf{b}$ in einem Koordinatensystem so, dass die geometrische Interpretation der Vektorsumme deutlich wird.

Teilaufgabe B: Berechnen Sie das Skalarprodukt $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ und beschreiben Sie die geometrische Interpretation verbal oder mit einer Skizze.

Teilaufgabe C: Beschreiben Sie verbal oder mit einer Skizze die Menge aller Vektoren $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$, für die

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{x}$$

gilt.

Teilaufgabe D: Wir fassen nun $\mathbb{R}^2$ in üblicher Weise als Teilmenge von $\mathbb{R}^3$ auf, so dass die gegebenen Vektoren $\mathbf{a}$ und $\mathbf{b}$ eine dritte Komponente mit Wert 0 erhalten, also $\mathbf{a} = (3, 2, 0)$ und $\mathbf{b} = (-2, 2, 0)$. Seien x, y und z die Koordinaten des Vektorproduktes $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (x, y, z)$. Was folgt allein aus der allgemeinen Interpretation von Richtung und Länge des Vektorproduktes zweier Vektoren im $\mathbb{R}^3$ für die Koordinaten x, y und z? Setzen Sie dazu nicht in die Formel für das Vektorprodukt ein, sondern argumentieren Sie mit dieser geometrischen Interpretation.

Aufgabe 2: In dieser Aufgabe geht es um die Funktion $T(x) := -x^2 + 5x - 3$ und ihre Iterationen. Und zwar sei für beliebiges $a \in \mathbb{R}$ die Folge $\mathbf{x}_a := (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ durch $x_0 := a$ und $x_{n+1} := T(x_n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ definiert.

Teilaufgabe A: Hat T Nullstellen $\alpha_1 < \alpha_2 < \ldots < \alpha_k$, lokale Extremstellen $\beta_1 < \beta_2 < \ldots < \beta_l$ und Fixpunkte $\gamma_1 < \gamma_2 < \ldots < \gamma_m$? Wieviele? Geben Sie diese Anzahlen k, l, m sowie die einzelnen Werte an:

Nullstellen: Nebenrechnung ...

also $k = \ldots$, nämlich ...

Extremstellen: Nebenrechnung ...

also $l = \ldots$, nämlich ...

Fixpunkte: Nebenrechnung ...

also $m = \ldots$, nämlich ...

Teilaufgabe B: Fertigen Sie eine Skizze von T samt allen Nullstellen, Extremstellen und Fixpunkten aus Teilaufgabe A an.

Teilaufgabe C: Gibt es Werte $a \in \mathbb{R}$, die nicht Fixpunkt von T sind und für die $\mathbf{x}_a$ gegen eine reelle Zahl x konvergiert? Wenn ja, dann genügt es, so ein a samt x anzugeben; wenn nein, so ist dies zu begründen. (Hinweis: $T : \frac{5}{2} \mapsto \frac{13}{4} \mapsto \frac{43}{16} > \frac{40}{16} = \frac{5}{2}$)

○ Ja, zum Beispiel $a = \ldots$ und $x = \ldots$.

○ Nein, Begründung: ...

Teilaufgabe D: Gibt es Werte $a \in \mathbb{R}$, für die $\mathbf{x}_a$ gegen ∞ oder gegen $-\infty$ divergiert? Wenn ja, dann genügt es, so ein a anzugeben und anzukreuzen, ob die Folge gegen ∞ oder $-\infty$ divergiert. Wenn nein, so ist dies zu begründen.

○ Ja, zum Beispiel $a = \ldots$ mit Divergenz gegen ○ ∞ ○ $-\infty$.

○ Nein, Begründung: ...

Aufgabe 3: In dieser Aufgabe geht es um Integrale und Stammfunktionen mit dem Integranden $f(x) := xe^{-x^2}$, $x \in \mathbb{R}$.

Teilaufgabe A: Ist das (Riemann-)Integral $I(a,b) := \int_a^b f(x)\,dx$ für alle $a < b \in \mathbb{R}$ definiert? Begründen Sie Ihre Antwort ohne Rechnung, sondern indem Sie auf Eigenschaften von Integranden und Integrationsbereich sowie auf eine entsprechende allgemeine Eigenschaft des Integralbegriffs Bezug nehmen.

Teilaufgabe B: Hat die Funktion f eine Stammfunktion auf ganz $\mathbb{R}$? Begründen Sie Ihre Antwort ähnlich wie in Teilaufgabe A mit Hilfe eines allgemeinen Sachverhalts und ohne Rechnung.

Teilaufgabe C: Geben Sie einen möglichst großen Bereich $D \subseteq \mathbb{R}$ an, wo es eine Stammfunktion $F : D \to \mathbb{R}$ von f gibt und geben Sie so ein F auf D explizit an. (Sollte es nirgendwo eine Stammfunktion geben, so ist $D = \emptyset$ zu setzen.)

Teilaufgabe D: Berechnen Sie das Integral $I(-a,a)$ (siehe Teilaufgabe A) für alle jene $a > 0$, für die $I(-a,a)$ definiert ist.

Aufgabe 4: In dieser Aufgabe geht es um die Frage, ob man aus den Werten der ersten bzw. zweiten Ableitung einer zweimal differenzierbaren Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ auf die Werte von f selbst schließen kann. Genauer spielen folgende Voraussetzungen eine Rolle:
(i) $|f'(x)| \leq 3$ für alle $x \in [-10, 10]$
(ii) $f(0) = 0$
(iii) $|f''(x)| \leq 3$ für alle $x \in [-10, 10]$
(iv) $f'(0) = 0$

Die fragliche Schlussfolgerung lautet
(*) Es gibt eine reelle Zahl C derart, dass für alle f, die die jeweils angegebene(n) Voraussetzung(en) erfüllen, und für alle $x \in [-10, 10]$ die Abschätzung $|f(x)| \leq C$ gilt.

Wenn es so ein C gibt, geben Sie jeweils ein möglichst kleines an, andernfalls ein Gegenbeispiel für f und x_0.

Teilaufgabe A: Folgt (*) aus (i)?

○ Ja, zum Beispiel $C := \ldots$.

○ Nein, insbesondere gibt es ein f mit (i) und ein $x_0 \in [-10, 10]$ mit $|f(x_0)| \geq 1000$, nämlich zum Beispiel:

$f(x) := \ldots$ und $x_0 := \ldots$

Teilaufgabe B: Folgt (*) aus (i) und (ii)?

○ Ja, zum Beispiel $C := \ldots$.

○ Nein, insbesondere gibt es ein f mit (i) und (ii) und ein $x_0 \in [-10, 10]$ mit $|f(x_0)| \geq 1000$, nämlich zum Beispiel:

$f(x) := \ldots$ und $x_0 := \ldots$

Teilaufgabe C: Folgt (*) aus (ii) und (iii)?

○ Ja, zum Beispiel $C := \ldots$.

○ Nein, insbesondere gibt es ein f mit (ii) und (iii) und ein $x_0 \in [-10, 10]$ mit $|f(x_0)| \geq 1000$, nämlich zum Beispiel:

$f(x) := \ldots$ und $x_0 := \ldots$

Teilaufgabe D: Folgt (*) aus (ii), (iii) und (iv)?

○ Ja, zum Beispiel $C := \ldots$.

○ Nein, insbesondere gibt es ein f mit (i) und ein $x_0 \in [-10, 10]$ mit $|f(x_0)| \geq 1000$, nämlich zum Beispiel:

$f(x) := \ldots$ und $x_0 := \ldots$

Raum für Nebenrechnungen und sonstige Notizen, die bei der Beurteilung ignoriert werden.

Raum für Nebenrechnungen und sonstige Notizen, die bei der Beurteilung ignoriert werden.