Mathematik 1 für Bauingenieurwesen

Prüfung am 13.10.2017
Reinhard Winkler

Name (bitte ausfüllen):

Matrikelnummer (bitte ausfüllen):

Wichtige Hinweise bevor Sie beginnen:

- Die Prüfung besteht aus vier Aufgaben 1, 2, 3, 4, untergliedert in jeweils vier Teilaufgaben A, B, C, D. Zu jeder Teilaufgabe wird maximal ein Punkt vergeben. Ab 8 von 16 möglichen Punkten ist Ihnen eine positive Note sicher.
- Die Arbeitszeit beträgt 90 Minuten.
- Wenn in der Angabe nicht ausdrücklich anders vermerkt, wird zu jeder Teilaufgabe der Punkt (oder Teile eines Punktes) ausschließlich für das vergeben, was Sie unmittelbar neben bzw. unterhalb der Angabe dieser Teilaufgabe niedergeschrieben haben (und nicht unterhalb der horizontalen Trennlinie zur nächsten Teilaufgabe). Drei Punkte ... symbolisieren, dass Sie Ihre Eintragung an dieser Stelle machen bzw. beginnen, ein kleiner Kreis ∘, dass Sie Zutreffendes ankreuzen sollen.

  In den meisten Fällen sollte der jeweils vorgesehene Platz für die Lösung der Aufgabe ausreichen. Es lohnt daher, wenn Sie sich, bevor Sie mit dem Schreiben beginnen, vergewissern, dass Sie Ihre Antwort entsprechend kurz fassen können. Sollten Sie längere Nebenrechnungen oder sonstige schriftliche Überlegungen durchführen wollen, stehen Ihnen dafür die beiden letzten Blätter dieses Heftes zur Verfügung. Was immer Sie auf den letzten beiden Blättern notieren, wird bei der Punkteauswertung ignoriert.
- Wenn Sie sich noch vor Ausführung der Details einen Überblick darüber verschaffen, was in den einzelnen Aufgaben und ihren Teilen zu tun ist, kann das hilfreich für eine kluge Zeiteinteilung sein.

Nur vom Prüfer auszufüllen:

Punkte für Aufgabe 1: Aufgabe 2: Aufgabe 3: Aufgabe 4:

Gesamtpunktezahl:

Note:

Sonstige Bemerkungen:

Aufgabe 1: Diese Aufgabe hat kombinatorischen Charakter, d.h. es sind Anzahlen von gewissen Objekten zu bestimmen. Eine besondere Rolle spielen Permutationen (Vertauschungen) der Zahlen 1 bis n. Deshalb führen wir einige Abkürzungen ein:

Ist M eine Menge, so bezeichne $P(M)$ die Menge aller Permutationen π von M. Bekanntlich gibt es von einer Menge mit n Elementen $n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$ solche π. Speziell interessieren wir uns für die Menge $M_n := \{1, 2, \ldots, n\}$. In dieser Aufgabe sind Anzahlen gewisser Teilmengen anderer Mengen, u.a. von $P(M_n)$ zu bestimmen.

Teilaufgabe A: Für $k \leq n \in \mathbb{N}$ bezeichne $B(n, k)$ die Anzahl der k-elementigen Teilmengen von M_n. (Die Zahlen $B(n, 0), B(n, 1), \ldots, B(n, n)$ treten übrigens auch auf, wenn man die n-te Potenz einer Summe zweier Summanden berechnet.) Geben Sie eine Formel für $B(n, k)$ an, in der Faktorielle vorkommen.

$B(n, k) = \ldots$ $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$

Teilaufgabe B: Wenn man die Formel, nach der in Teilaufgabe A gefragt wurde, herleitet, treten Überlegungen wie die folgenden auf:

Die Elemente von $P(M_5)$ permutieren die Zahlen 1 bis 5. Es kann sein, dass durch ein $\pi \in P(M_5)$ alle Elemente der Teilmenge $M_3 = \{1, 2, 3\}$ nur untereinander vertauscht werden. Dann gilt das notgedrungen auch für die Elemente der komplementären Teilmenge $M_5 \setminus M_3 = \{4, 5\}$. (Zum Beispiel ist das der Fall bei der Permutation $\pi : 1 \mapsto 2 \mapsto 3 \mapsto 1,\ 4 \mapsto 5 \mapsto 4$, die die Zahlen 1 bis 3 zyklisch vertauscht und außerdem 4 mit 5.) Wieviele solche $\pi \in P(M_5)$, die also zusätzlich $\pi(M_3) = M_3$ erfüllen, gibt es?

Die Anzahl solcher π ist .... $3! \cdot 2! = 12$

Teilaufgabe C: Teilaufgabe B soll nun verallgemeinert werden. Die Rolle der Zahlen 5, 3 und $5 - 3 = 2$ übernehmen nun irgendwelche beliebige natürliche Zahlen n, a, b mit $a + b = n$. Gesucht ist also eine Formel für die Anzahl $A(n, a, b)$ der Permutationen $\pi \in P(M_n)$, die die Teilmenge $M_a = \{1, 2, \ldots, a\}$ mit $a \leq n$ (und folglich auch die Teilmenge $M_n \setminus M_a = \{a + 1, \ldots, n\}$) permutieren.

$A(n, a, b) = \ldots$ $a! \cdot b!$

Teilaufgabe D: Wir übernehmen die Bezeichnungen aus Teilaufgabe C. Ist irgendein $\pi \in P(M_n)$ (also eine Permutation der Zahlen 1 bis n) gegeben und $a < n$, so muss π nicht wie in Teilaufgabe B beschaffen sein. Denn es kann sein, dass das Bild $\pi(M_a)$ nicht alle Elemente aus M_a enthält, dafür aber auch andere, nämlich aus $M_n \setminus M_a$. Weil π als Permutation bijektiv ist, hat $\pi(M_a)$ aber sicher gleich viele Elemente wie M_a, nämlich $|\pi(M_a)| = |M_a| = a$. Es ist klar, dass es für jede Teilmenge $M \subseteq M_n$ der Größe a gleich viele $\pi \in S_n$ gibt, für die $\pi(M_a) = M$ gilt. Diese Anzahl sei mit $A'(n, a, b)$ bezeichnet. Geben Sie diese Zahl an.

(Hinweis: Angenommen wir haben ein π mit $\pi(M_a) = M$. Dann ist $\{\pi(1), \ldots, \pi(a)\} = M$ und $\{\pi(a+1), \ldots, \pi(n)\} = M_n \setminus M$. Die Frage läuft darauf hinaus, auf wieviele Arten wir die Elemente $\pi(1)$ bis $\pi(n)$ vertauschen können, so dass die Mengen M und $M_n \setminus M$ als Mengen unverändert bleiben. Gerade darum ging es auch in Teilaufgabe C.)

Für jedes $M \subseteq M_n$ mit $|M| = a$ gilt

$A'(n, a, b) = |\{\pi \in P(M_n) :\ \pi(M_a) = M\}| = \ldots$ $a! \cdot b!$

Aufgabe 2: In dieser Aufgabe sollen Potenzfunktionen als Verkettungen anderer Funktionen dargestellt und mit Hilfe der Kettenregel abgeleitet werden. Dabei dürfen die Exponentialfunktion $\exp : x \mapsto e^x$ und der natürliche Logarithmus $\ln : x \mapsto \ln x$ samt ihren Ableitungen als bekannt vorausgesetzt werden. Wir schreiben $p_\alpha : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, $x \mapsto x^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$, für die Potenzfunktionen.

Teilaufgabe A: Definieren Sie $p_\alpha := \exp \circ l_\alpha \circ \ln$ als Verkettung, indem Sie eine geeignete Funktion l_α angeben.

$l_\alpha(y) :=$ $\alpha \cdot y$

Probe (nicht verpflichtend, vielleicht aber eine wertvolle Kontrolle):

$p_\alpha(x) = x^\alpha = (e^{\ln x})^\alpha = \ldots$ $e^{\alpha \cdot \ln(x)} =$

$\ldots = \exp(l_\alpha(\ln x)) = (\exp \circ l_\alpha \circ \ln)(x)$

Teilaufgabe B: Die Kettenregel gibt an, wie man die Ableitung einer Verkettung $g \circ f$ zweier reeller Funktionen berechnet, sofern man die Ableitungen f' und g' von f und g kennt. Formulieren Sie diese Regel, indem Sie vervollständigen:

Ist f differenzierbar an der Stelle x, und ist g differenzierbar an der Stelle $f(x)$, dann ist $g \circ f$ differenzierbar an der Stelle x, und es gilt:

$(g \circ f)'(x) =$ $g'(f(x)) \cdot f'(x)$

Teilaufgabe C: Aus der Kettenregel für zwei verkettete Funktionen aus Teilaufgabe B folgt sehr schnell die entsprechende Kettenregel für drei Faktoren, in Kurzfassung:

$$(h \circ g \circ f)'(x) = h'(g(f(x))) \cdot g'(f(x)) \cdot f'(x)$$

Wenden Sie diese Regel auf $p_\alpha := \exp \circ l_\alpha \circ \ln$ aus Teilaufgabe A an, um die Ableitung p'_α zu berechnen. Tun Sie das, indem Sie folgende Rechnung vervollständigen:

$p'_\alpha(x) = (\exp \circ l_\alpha \circ \ln)'(x) = \ldots$ $\exp'(l_\alpha(\ln(x))) \cdot l_\alpha'(\ln(x)) \cdot \ln'(x) =$

$= \exp(l_\alpha(\ln(x))) \cdot \alpha \cdot \frac{1}{x} = e^{\alpha \cdot \ln(x)} \cdot \alpha \cdot \frac{1}{x} = x^\alpha \cdot \alpha \cdot \frac{1}{x} =$

$= \alpha x^{\alpha - 1}$ $\ldots = \alpha p_{\alpha-1}(x)$

Teilaufgabe D: Die Funktionalgleichung $f(x + y) = f(x) \cdot f(y)$ gilt bekanntlich für die Exponentialfunktion. Nicht gilt sie für Potenzfunktionen mit $\alpha \neq 0$, wie zum Beispiel die Werte $\alpha = x = y = 1$ zeigen:

$$p_\alpha(x + y) = (1 + 1)^1 = 2 \neq 1 = 1^1 \cdot 1^1 = p_\alpha(x) \cdot p_\alpha(y).$$

Für Potenzfunktionen gilt aber eine ähnliche Funktionalgleichung. Welche?

Die Funktionalgleichung für Potenzfunktionen lautet: $\ldots$ $f(x \cdot y) = f(x) \cdot f(y)$

Aufgabe 3: In dieser Aufgabe geht es um Polynomfunktionen und deren lokale Extremstellen.

Teilaufgabe A: Wieviele lokale Extremstellen kann eine Polynomfunktion f von positivem Grad $n \geq 1$ maximal haben? Begründen Sie Ihre Antwort.

Die maximale Anzahl ist .... $n-1$

Begründung: ... Lokale Extremstellen sind Nullstellen der Ableitung f'. Die Ableitung f' von f ist ein Polynom vom Grad $n-1$. Polynome haben höchstens so viele Nullstellen, wie ihr Grad beträgt.

Teilaufgabe B: Gibt es eine Polynomfunktion f vom Grad 4 mit genau drei lokalen Extremstellen? Wenn ja, geben Sie ein Beispiel an; wenn nein, begründen Sie dies.

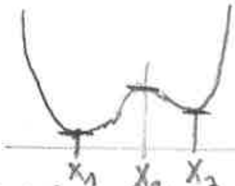
☒ Ja, so ein f gibt es. ○ Nein, so ein f gibt es nicht.

Angabe eines Beispiels bzw. Begründung (auch anschauliche Skizze gilt):

$f(x) = (x+1)x(x-1)(x-2)$ hat Grad 4, Nullstellen bei $x = -1, 0, 1, 2$, und zischen jeder ein lokales Extremum.

Bem: Das ist eine sehr ausführliche Erklärung, wird nicht in dieser Ausführlichkeit verlangt.

Teilaufgabe C: Gibt es eine Polynomfunktion f vom Grad 4 mit genau zwei lokalen Extremstellen? Wenn ja, geben Sie ein Beispiel an; wenn nein, begründen Sie dies.



Skizze

○ Ja, so ein f gibt es. ☒ Nein, so ein f gibt es nicht.

Angabe eines Beispiels bzw. Begründung (auch anschauliche Skizze gilt):

Sei $f(x) = \sum_{n=0}^{4} a_n x^n$, $a_4 \neq 0$, o.B.d.A. $a_4 > 0$ ($a_4 < 0$ analog, bzw. $-f$ nehmen).
$\Rightarrow \lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} f(x) = \infty \Rightarrow \exists a > 0: f(x) > f(0) = a_0$ für alle $x \notin [-a, a]$
Satz vom Maximum $\Rightarrow \exists$ Minimumstelle in $[-a, a]$, sei x_1 die kleinste, x_3 die größte lokale Minimumstelle in $[-a, a]$. Sei $x_1 \neq x_3 \overset{(*)}{\Rightarrow} f$ ist in einer Umgebung rechts von x_1 monoton wachsend, links von x_3 fallend. Dazwischen liegt eine lokale Maximumstelle x_2 von f. Diese muss von x_1 und x_3 verschieden sein. Also: Gibt es zwei lokale Extremstellen, dann sogar drei.

(*) Hier wird verwendet dass nichtkonst. Polynome auf keinem Intervall konstant sind. Denn sonst würde ein Wert unendlich oft angenommen werden.

Teilaufgabe D: Es gibt genau vier natürliche Zahlen $k = k_1, k_2, k_3, k_4$, für die es eine Polynomfunktion vom Grad 8 mit genau k lokalen Extremstellen gibt. Welche k_i sind das?

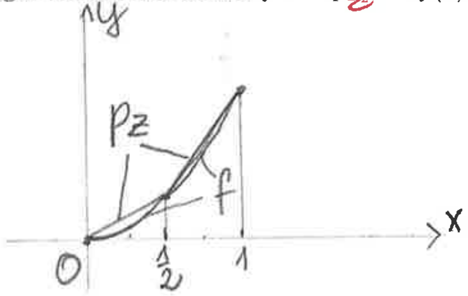
$k_1 = 1$, $k_2 = 3$, $k_3 = 5$, $k_4 = 7$

(Erklärung: Ähnlich wie in Teilaufgabe C muss es mindestens eine lokale Extremstelle geben, und mit jeder zusätzlichen kommt automatisch eine zweite hinzu. Dies als heuristischer Hintergrund, da hier nicht ausformuliert werden muss.)

Aufgabe 4: In dieser Aufgabe sollen Formeln für Bogenlängen $L(f)$ von Funktionsgraphen von Funktionen $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ angegeben werden.

Für eine Zerlegung $Z = \{0 = x_0 \leq x_1 \leq x_2 \leq \ldots \leq x_{n-1} \leq x_n = 1\}$ von $[0,1]$ bezeichne p_Z den Polygonzug, der f auf Z linear interpoliert, genauer: $p_Z(x_i) = f(x_i)$ für $i = 0, \ldots, n$, und auf jedem Teilintervall $[x_{i-1}, x_i]$ sei p_Z eine (i.a. inhomogene) lineare Funktion. Speziell sei $Z_n = \{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, \frac{n-1}{n}, 1\} = \{x_i = \frac{i}{n} : i = 0, \ldots, n\}$ die äquidistante Zerlegung in n Teilintervalle.

Teilaufgabe A: Für gegebenes f ist p_{Z_2} nach Definition die aus zwei linearen Teilen bestehende Funktion auf $[0,1]$, deren Werte an den Stellen $0, \frac{1}{2}$ und 1 mit denen von f übereinstimmen. Fertigen Sie eine Skizze von f und p_Z für $f(x) := x^2$ an.



Teilaufgabe B: Berechnen Sie die Bogenlänge $L(p_2)$ von p_2, wenn $f(x) := x^2$ gegeben ist. Sie müssen den Wert nicht numerisch bestimmen. Es genügt, wenn Sie natürliche Zahlen a, b, c finden mit $L(p_2) = \frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{c}$.

$L(p_2) = \ldots$ $\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{4}\right)^2} + \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{3}{4}\right)^2} = \sqrt{\frac{4}{16}+\frac{1}{16}} + \sqrt{\frac{4}{16}+\frac{9}{16}} = \frac{1}{4}\left(\sqrt{5}+\sqrt{13}\right)$

Also $a = \ldots$ 5, $b = \ldots$ 13, $c = \ldots$ 4.

Teilaufgabe C: Geben Sie eine allgemeine Formel für die Bogenlänge $L(p_Z)$ von p_Z an, wenn f und Z wie oben gegeben sind.

$$L(p_Z) = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + \left(f(x_i) - f(x_{i-1})\right)^2}$$

Teilaufgabe D: Die Bogenlänge $L(f)$ des Graphen von f kann man definieren als das Supremum der Werte $L(p_Z)$, wenn Z alle Zerlegungen von $[0,1]$ durchläuft. Man kann zeigen, dass $L(f)$ sicher dann als endliche reelle Zahl existiert, wenn f stetig differenzierbar ist. In diesem Fall hat $L(f)$ eine Darstellung als Riemann-Integral. Geben Sie diese Darstellung an.

$L(f) = \ldots$ $\int_0^1 \sqrt{1+f'(x)^2}\, dx$