Mathematik 1 für Bauingenieurwesen

Prüfung am 1.12.2017
Reinhard Winkler

Name (bitte ausfüllen):

Matrikelnummer (bitte ausfüllen):

Wichtige Hinweise bevor Sie beginnen:

- Die Prüfung besteht aus vier Aufgaben 1, 2, 3, 4, untergliedert in jeweils vier Teilaufgaben A, B, C, D. Zu jeder Teilaufgabe wird maximal ein Punkt vergeben. Ab 8 von 16 möglichen Punkten ist Ihnen eine positive Note sicher.
- Die Arbeitszeit beträgt 90 Minuten.
- Wenn in der Angabe nicht ausdrücklich anders vermerkt, wird zu jeder Teilaufgabe der Punkt (oder Teile eines Punktes) ausschließlich für das vergeben, was Sie unmittelbar neben bzw. unterhalb der Angabe dieser Teilaufgabe niedergeschrieben haben (und nicht unterhalb der horizontalen Trennlinie zur nächsten Teilaufgabe). Drei Punkte ... symbolisieren, dass Sie Ihre Eintragung an dieser Stelle machen bzw. beginnen, ein kleiner Kreis $\circ$, dass Sie Zutreffendes ankreuzen sollen.

  In den meisten Fällen sollte der jeweils vorgesehene Platz für die Lösung der Aufgabe ausreichen. Es lohnt daher, wenn Sie sich, bevor Sie mit dem Schreiben beginnen, vergewissern, dass Sie Ihre Antwort entsprechend kurz fassen können. Sollten Sie längere Nebenrechnungen oder sonstige schriftliche Überlegungen durchführen wollen, stehen Ihnen dafür die beiden letzten Blätter dieses Heftes zur Verfügung. Was immer Sie auf den letzten beiden Blättern notieren, wird bei der Punkteauswertung ignoriert.
- Wenn Sie sich noch vor Ausführung der Details einen Überblick darüber verschaffen, was in den einzelnen Aufgaben und ihren Teilen zu tun ist, kann das hilfreich für eine kluge Zeiteinteilung sein.

Nur vom Prüfer auszufüllen:

Punkte für Aufgabe 1: Aufgabe 2: Aufgabe 3: Aufgabe 4:

Gesamtpunktezahl:

Note:

Sonstige Bemerkungen:

Aufgabe 1: In dieser Aufgabe spielen das Abzählen von Mengen und Teilbarkeitseigenschaften natürlicher Zahlen die Hauptrolle. Für eine natürliche Zahl $n > 0$ schreiben wir V_n für die Menge aller positiven Vielfachen von n, also $V_n := \{kn > 0 : k \in \mathbb{N}\}$. Außerdem bezeichne $\mathbb{P}$ die Menge der Primzahlen.

Teilaufgabe A: Seien n und $N \in \mathbb{N}$ vorgegeben. Geben Sie einen Formelausdruck an für die Anzahl $|V_n \cap [1, N]|$ der Vielfachen von n, die $\leq N$ sind. Verwenden Sie dabei die Schreibweise $\lfloor x \rfloor$ für die größte ganze Zahl $\leq x$ (zum Beispiel $\lfloor \pi \rfloor = 3$).

$|V_n \cap [1, N]| := \ldots \left\lfloor \frac{N}{n} \right\rfloor$

Teilaufgabe B: Für zwei positive natürliche Zahlen m und n lässt sich die Schnittmenge $V_m \cap V_n$ als eine Menge V_k mit einem geeigneten k schreiben. Bestimmen Sie dieses k zunächst für $m = 20$ und $n = 50$.

$V_{20} \cap V_{50} = V_k$ mit $k = \ldots 100$

Teilaufgabe C: Wie Teilaufgabe B nur für allgemeine Werte m und n, wobei für diese Zahlen die Primzahlzerlegungen gegeben seien:

$$m = \prod_{p \in \mathbb{P}} p^{e_p(m)} \quad \text{und} \quad n = \prod_{p \in \mathbb{P}} p^{e_p(n)}$$

Und zwar soll angegeben werden, wie sich die $e_p(k)$ für jenes $k = \prod_{p \in \mathbb{P}} p^{e_p(k)}$ mit $V_k = V_m \cap V_n$ aus den $e_p(m)$ und $e_p(n)$ errechnen:

$e_p(k) = \ldots \max \{e_p(m), e_p(n)\}$

Teilaufgabe D: Bestimmen Sie folgende Anzahl (Achtung, Vereinigung statt Schnitt!):

$|(V_{20} \cup V_{50}) \cap [1, 1000]| = \ldots |(V_{20} \cap [1,1000]) \cup (V_{50} \cap [1,1000])| =$

$|V_{20} \cap [1,1000]| + |V_{50} \cap [1,1000]| - |\underbrace{V_{20} \cap V_{50}}_{=V_{100}} \cap [1,1000]| =$

$\left\lfloor \frac{1000}{20} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{1000}{50} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{1000}{100} \right\rfloor = 50 + 20 - 10 = \underline{\underline{60}}$

Aufgabe 2: In dieser Aufgabe geht es um den Vergleich von Summen und bestimmten Integralen über reelle Funktionen $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$. Dazu schreiben wir $a_n := f(n)$ und $s_N := \sum_{n=1}^{N} a_n$. Ist f auf einem Intervall $[n, n+1]$ annähernd konstant, so gilt die Näherungsformel

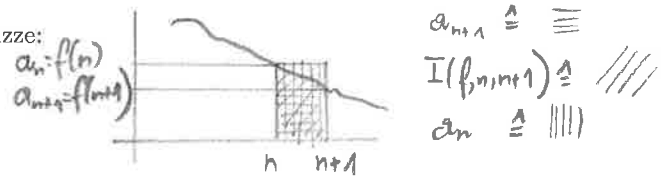
$$a_n = f(n) \approx I(f, n, n+1) := \int_n^{n+1} f(x)\,dx \approx f(n+1) = a_{n+1},$$

wobei wir für $a < b$ generell $I(f, a, b) := \int_a^b f(x)\,dx$ setzen. Dieser approximative Zusammenhang soll nun näher beleuchtet werden.

Teilaufgabe A: Geben Sie eine wichtige Eigenschaften E reeller Funktionen an, so dass gilt: Hat f die Eigenschaft E, so gilt $a_{n+1} \leq I(f, n, n+1) \leq a_n$. Illustrieren Sie die Situation auch durch eine Skizze mit Flächen der Größen a_n, $I(f, n, n+1)$ und a_{n+1}.

Die gesuchte Eigenschaft E heißt ... „monoton fallend"

Skizze:



Teilaufgabe B: Wenn die Ungleichung $a_{n+1} \leq I(f, n, n+1) \leq a_n$ aus Teilaufgabe A für mehrere aufeinander folgende $n = k, k+1, \ldots, l-1$, gilt, so kann man aufsummieren und erhält $s_l - s_k = a_{k+1} + a_{k+1} + \ldots + a_l \leq I(f, k, l) \leq a_k + a_{k+1} + \ldots + a_{l-1} = s_{l-1} - s_{k-1}$. Sei nun $f(x) := \frac{1}{\sqrt{x^3}}$. Geben Sie die Randpunkte $a < b$ eines möglichst kleinen Intervalls $[a, b]$ an, so dass man auf die Ungleichung

$$s_N - s_1 = \sum_{n=2}^{N} a_n = \sum_{n=2}^{N} \frac{1}{\sqrt{n^3}} \leq \int_a^b \frac{dx}{\sqrt{x^3}}$$

schließen kann. Die Randpunkte a und b dürfen von N abhängen.

$a := \ldots 1$ $\qquad$ $b := \ldots N$

Teilaufgabe C: Berechnen Sie $I(f, 1, b)$ für f aus Teilaufgabe B als Funktion von b:

$I(f, 1, b) = \ldots \int_1^b \frac{1}{\sqrt{x^3}}\,dx = \int_1^b x^{-\frac{3}{2}}\,dx = \frac{1}{-\frac{1}{2}} x^{-\frac{1}{2}} \Big|_{x=1}^{b} = -\frac{2}{\sqrt{x}} \Big|_{x=1}^{b} = 2\left(1 - \frac{1}{\sqrt{b}}\right)$

Teilaufgabe D: *Falls* für irgendein festes $a \in \mathbb{R}$ das Integral $I(f, a, b)$ aus Teilaufgabe C für $b \to \infty$ konvergiert, so folgt daraus wegen Teilaufgabe B die Konvergenz

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^3}} < \infty.$$

Entscheiden Sie mit Hilfe Ihres Ergebnisses aus Teilaufgabe C, ob tatsächlich $\lim_{b\to\infty} I(f, 1, b)$ als reelle Zahl existiert oder ob Divergenz gegen ∞ herrscht.

☒ $\lim_{b\to\infty} I(f, 1, b) = \ldots 2 \ldots \in \mathbb{R}$ $\qquad$ ○ $\lim_{b\to\infty} I(f, 1, b) = \infty$

Aufgabe 3: In dieser Aufgabe kommen Potenzreihen und die Regel von de l'Hospital vor. Außerdem soll ein Zusammenhang zwischen beiden Themen erkannt werden.

Teilaufgabe A: Ermitteln Sie die Potenzreihendarstellung der Funktion

$$f(x) := e^x - x - 1 = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

Es genügt, wenn Sie dafür die Koeffizienten angeben:

Eventuell Nebenrechnung: ... $e^x - x - 1 = \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \ldots\right) - x - 1 =$

$= \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots$

$a_0 = 0$, $\quad a_1 = 0$, $\quad a_2 = \frac{1}{2}$

und für $n > 2$ allgemein $a_n = \frac{1}{n!}$

Teilaufgabe B: Berechnen Sie den folgenden Grenzwert mit Hilfe der Regel von de l'Hospital:

$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - x - 1}{x^2} = \ldots \lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{2x} = \lim_{x \to 0} \frac{e^x}{2} = \frac{1}{2}$

Teilaufgabe C: Haben allgemein zwei reelle Funktionen f und g (g nicht die Nullfunktion) Potenzreihendarstellungen $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ und $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ mit positivem Konvergenzradius, so lässt sich daraus unmittelbar ablesen, ob der Grenzwert

$$\alpha := \lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{g(x)}$$

existiert und, gegebenenfalls, welchen Wert er hat. Der Einfachheit soll hier $a_0 \neq 0 \neq b_0$ angenommen werden. Geben Sie an, ob in diesem Fall der Grenzwert α existiert und, wenn ja, wie sich dieser Wert aus gewissen der Koeffizienten a_n und b_n errechnet.

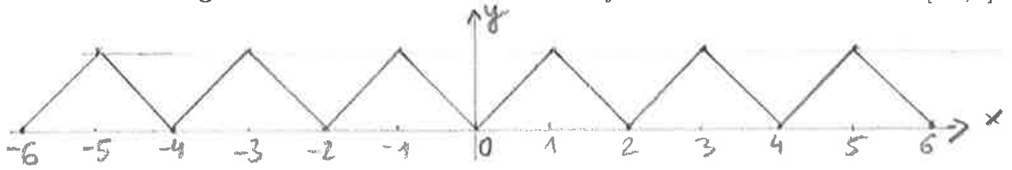
○ $\alpha = \ldots \frac{a_0}{b_0} \ldots \in \mathbb{R}$ ○ Der Grenzwert α existiert nicht.

Teilaufgabe D: Im Gegensatz zu Teilaufgabe C wollen wir nun auch $a_0 = 0$ und/oder $b_0 = 0$ zulassen. Wir definieren n_f und n_g als jene Indizes, für die die Koeffizienten für f und g erstmals von 0 verschieden sind. Seien also n_f und n_g so gewählt, dass $a_0 = a_1 = \ldots = a_{n_f - 1} = 0$ und $a_{n_f} \neq 0$ sowie $b_0 = b_1 = \ldots = b_{n_g - 1} = 0$ und $b_{n_g} \neq 0$ gilt. Für die drei Möglichkeiten $n_f < n_g$, $n_f = n_g$ und $n_f > n_g$ soll die analoge Frage wie in Teilaufgabe C beantwortet werden:

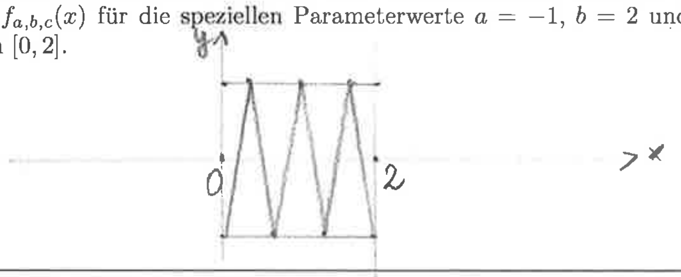
Für $n_f < n_g$	○ ist $\alpha = \ldots\ldots\ldots \in \mathbb{R}$.	✗ existiert der Grenzwert α nicht.
Für $n_f = n_g$	✗ ist $\alpha = \ldots \frac{a_{n_f}}{b_{n_g}} \ldots \in \mathbb{R}$.	○ existiert der Grenzwert α nicht.
Für $n_f > n_g$	✗ ist $\alpha = \ldots 0 \ldots \in \mathbb{R}$.	○ existiert der Grenzwert α nicht.

Aufgabe 4: Die Funktion $f_0 : [0,2] \to \mathbb{R}$ sei definiert durch $f_0(x) := x$ für $0 \le x \le 1$ und $f_0(x) := 2 - x$ für $1 < x \le 2$. Die periodische Fortsetzung von f_0 auf ganz $\mathbb{R}$ heiße f, also: $f(x) := f_0(x - 2k)$ sofern $2k \le x < 2k + 2$ mit einem $k \in \mathbb{Z}$. (Sägezahnfunktion)

Teilaufgabe A: Skizzieren Sie die Funktion f auf dem Definitionsbereich $[-6, 6]$.



Teilaufgabe B: Für reelle Zahlen a, b, c definieren wir die Funktion $f_{a,b,c}(x) := a + bf(cx)$. Die Parameter a, b, c bewirken also Verschiebungen bzw. Verzerrungen des Graphen von f. Skizzieren Sie die Funktion $f_{a,b,c}(x)$ für die speziellen Parameterwerte $a = -1$, $b = 2$ und $c = 3$ auf dem Definitionsbereich $[0, 2]$.



Teilaufgabe C: Für $f_{a,b,c}$ wie in Teilaufgabe B sei nun $a = 1$, $b = 3$ und $c = 5$. Wieviele lokale Extremstellen hat $f_{a,b,c} = f_{1,3,5}$ im Intervall $[0, 2]$ und welche Werte nimmt $f_{1,3,5}$ an diesen Stellen an?

Im abgeschlossenen Intervall $[0, 2]$ hat die Funktion $f_{1,3,5}$ genau

....5.... Stellen eines lokalen Maximums und

....6.... Stellen eines lokalen Minimums.

Der maximale Wert von $f_{1,3,5}$ ist ....4...., der minimale Wert von $f_{1,3,5}$ ist ..1......

Teilaufgabe D: Die Rechnung

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} f(nx) \right| \le \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{1}{2^n} f(nx) \right| \le \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1 < \infty$$

zeigt, dass die Funktionenreihe mit den Summanden $g_n(x) := \frac{1}{2^n} f(nx)$ folgende beiden Eigenschaften hat:

1) Die Konvergenz (nicht der Grenzwert) ist *unabhängig vom Vorzeichen* der Summanden.

2) Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es einen Index $n(\varepsilon)$ so, dass *unabhängig von* $x \in \mathbb{R}$ alle Partialsummen mit höherem Index als $n(\varepsilon)$ sich vom Grenzwert der Reihe um weniger als ε unterscheiden.

Wie nennt man diese beiden Eigenschaften?

Eine Reihe, die 1) erfüllt heißt ..absolut konvergent

Eine Reihe, die 2) erfüllt heißt ... gleichmäßig konvergent