# Mathematik 1 für Bauingenieurwesen

**Prüfung am 28.1.2019**
**Reinhard Winkler**

Name (bitte ausfüllen):

Matrikelnummer (bitte ausfüllen):

---

**Wichtige Hinweise bevor Sie beginnen:**

- Die Prüfung besteht aus vier Aufgaben 1, 2, 3, 4, untergliedert in jeweils vier Teilaufgaben A, B, C, D. Zu jeder Teilaufgabe wird maximal ein Punkt vergeben. Ab 8 von 16 möglichen Punkten ist Ihnen eine positive Note sicher.
- Die Arbeitszeit beträgt 90 Minuten.
- Wenn in der Angabe nicht ausdrücklich anders vermerkt, wird zu jeder Teilaufgabe der Punkt (oder Teile eines Punktes) ausschließlich für das vergeben, was Sie unmittelbar neben bzw. unterhalb der Angabe dieser Teilaufgabe niedergeschrieben haben (und nicht unterhalb der horizontalen Trennlinie zur nächsten Teilaufgabe). Drei Punkte ... symbolisieren, dass Sie Ihre Eintragung an dieser Stelle machen bzw. beginnen, ein kleiner Kreis ∘, dass Sie Zutreffendes ankreuzen sollen.

  In den meisten Fällen sollte der jeweils vorgesehene Platz für die Lösung der Aufgabe ausreichen. Es lohnt daher, wenn Sie sich, bevor Sie mit dem Schreiben beginnen, vergewissern, dass Sie Ihre Antwort entsprechend kurz fassen können. Sollten Sie längere Nebenrechnungen oder sonstige schriftliche Überlegungen durchführen wollen, stehen Ihnen dafür die beiden letzten Blätter dieses Heftes zur Verfügung. Was immer Sie auf den letzten beiden Blättern notieren, wird bei der Punkteauswertung ignoriert.
- Wenn Sie sich noch vor Ausführung der Details einen Überblick darüber verschaffen, was in den einzelnen Aufgaben und ihren Teilen zu tun ist, kann das hilfreich für eine kluge Zeiteinteilung sein.

---

Nur vom Prüfer auszufüllen:

Punkte für Aufgabe 1: Aufgabe 2: Aufgabe 3: Aufgabe 4:

Gesamtpunktezahl:

Note:

Sonstige Bemerkungen:

**Aufgabe 1:** In dieser Aufgabe geht es um Häufungspunkte und Grenzwerte $\alpha$ einer reellen Folge **a** mit den Gliedern $a_n$. Zu den folgenden Fragen ist jeweils die richtige Antwort anzukreuzen und durch ein Beispiel zu belegen.

---

**Teilaufgabe A:** Kann man die Glieder $a_n$ mit geradem Index $n$ so vorgeben, dass die Folge **a** *sicher konvergiert*, unabhängig von den Gliedern mit ungeradem $n$?

○ Ja, weil man z.B. $a_n :=$ ...... für gerade $n$ setzen kann,

um Konvergenz gegen $\alpha :=$ ...... zu erzwingen.

X Nein, weil man stets z.B. $a_n =$ ..n... für ungerade $n$ setzen kann, um Konvergenz auszuschließen.

---

**Teilaufgabe B:** Kann man die Glieder $a_n$ mit geradem Index $n$ so vorgeben, dass die Folge **a** *sicher nicht konvergiert*, unabhängig von den Gliedern mit ungeradem $n$?

X Ja, weil man z.B. $a_n :=$ ..n... für gerade $n$ setzen kann, um Konvergenz auszuschließen.

○ Nein, weil man stets z.B. $a_n =$ ...... für ungerade $n$ setzen kann,

um Konvergenz gegen $\alpha :=$ ...... zu erzwingen.

---

**Teilaufgabe C:** Kann man die Glieder $a_n$ mit geradem Index $n$ so vorgeben, dass die Folge **a** *sicher mindestens einen Häufungspunkt* hat, unabhängig von den Gliedern mit ungeradem $n$?

X Ja, weil man z.B. $a_n :=$ ..0... für gerade $n$ setzen kann,

um zu erzwingen, dass $\alpha :=$ ..0.. Häufungspunkt ist.

○ Nein, weil man stets z.B. $a_n =$ ...... für ungerade $n$ setzen kann,

um die Existenz eines Häufungspunktes auszuschließen.

---

**Teilaufgabe D:** Kann man die Glieder $a_n$ mit geradem Index $n$ so vorgeben, dass die Folge **a** *sicher keinen Häufungspunkt* hat, unabhängig von den Gliedern mit ungeradem $n$?

○ Ja, weil man z.B. $a_n :=$ ...... für gerade $n$ setzen kann,

um die Existenz eines Häufungspunktes auszuschließen.

X Nein, weil man stets z.B. $a_n =$ ..0... für ungerade $n$ setzen kann,

um den Häufungspunkt $\alpha :=$ ..0... zu erzwingen.

**Aufgabe 2:** In dieser Aufgabe geht es um Beziehungen zwischen folgenden wichtigen Typen von Funktionen in Verbindung mit der Verkettung $\circ$ und mit Umkehrfunktionen:

Homogene lineare Funktionen $\text{lin}_k$ mit Steigung $k \in \mathbb{R}$:

$$\text{lin}_k(x) := kx \quad \text{für } x \in \mathbb{R}$$

Exponentialfunktionen $\exp_a$ zu einer Basis $a > 0$:

$$\exp_a(x) := a^x \quad \text{für } x \in \mathbb{R}$$

Logarithmusfunktionen $\log_a$ zu einer Basis $a > 0$ mit $a \neq 1$:

$$\log_a = \exp_a^{(-1)} \text{ (Umkehrfunktion)} \quad \text{für } x > 0$$

Potenzfunktionen $\text{pot}_\alpha$ mit Exponenten $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$\text{pot}_\alpha(x) := x^\alpha \quad \text{für } x > 0$$

---

**Teilaufgabe A:** Für welche $k \in \mathbb{R}$ hat $\text{lin}_k$ eine Umkehrfunktion $\text{lin}_k^{(-1)}$? Geben Sie diese mit Hilfe der oben angegebenen Schreibweisen an.

Eine Umkehrfunktion von $\text{lin}_k$ gibt es genau für jene $k \in \mathbb{R}$ mit $k \neq 0$

Und zwar ist in diesem Fall $\text{lin}_k^{(-1)} =$ $\text{lin}_{k^{-1}}$

---

**Teilaufgabe B:** Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ hat $\text{pot}_\alpha$ eine Umkehrfunktion $\text{pot}_\alpha^{(-1)}$? Geben Sie diese mit Hilfe der oben angegebenen Schreibweisen an.

Eine Umkehrfunktion von $\text{pot}_\alpha$ gibt es genau für jene $\alpha \in \mathbb{R}$ mit $\alpha \neq 0$

Und zwar ist in diesem Fall $\text{pot}_\alpha^{(-1)} =$ $\text{pot}_{\alpha^{-1}}$

---

**Teilaufgabe C:** Der Ausdruck $(\exp_a \circ \text{lin}_k)(x)$ lässt sich umschreiben zu $\exp_b(x)$ mit einem geeigneten $b > 0$. Geben Sie dieses $b$ an.

Die Umformung $(\exp_a \circ \text{lin}_k)(x) = \exp_a(\text{lin}_k(x)) =$ $a^{kx} = (a^k)^x$

zeigt

$b =$ $a^k$

---

**Teilaufgabe D:** Die Potenzfunktionen erfüllen bekanntlich

$$(\text{pot}_\alpha \cdot \text{pot}_\beta)(x) = x^\alpha \cdot x^\beta = x^{\alpha+\beta} = \text{pot}_{\alpha+\beta}(x).$$

Schreiben Sie diese Beziehung um in eine Funktionalgleichung für $\exp_x$:

$\exp_x(\alpha) \cdot \exp_x(\beta) = \exp_x(\alpha+\beta)$

**Aufgabe 3:** In dieser Aufgabe geht es um die Ableitung einer Funktion $f$ allgemein wie auch speziell der Potenzfunktionen $\mathrm{pot}_n(x) := x^n$ mit $n \in \mathbb{N}$.

---

**Teilaufgabe A:** Definieren Sie die Ableitung $f'(x_0)$ einer differenzierbaren reellen Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ an einem inneren Punkt $x_0$ des Definitionsbereichs $D \subseteq \mathbb{R}$.

$$f'(x_0) := \ldots \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

---

**Teilaufgabe B:** Für beliebige reelle (oder auch komplexe) Zahlen $a, b$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt die Formel

$$a^n - b^n = (a-b) \cdot \sum_{k=0}^{n-1} a^{n-1-k} b^k.$$

Man kann das leicht nachrechnen, indem man mit der rechten Seite beginnt, den ersten Faktor ausmultipliziert, geschickt Summationsindizes verschiebt etc. Führen Sie diese Rechnung für den einfachen Spezialfall $n = 3$ durch:

$$(a-b) \cdot \sum_{k=0}^{n-1} a^{n-1-k} b^k = (a-b) \cdot \sum_{k=0}^{2} a^{n-1-k} b^k = \ldots (a-b) \cdot \left(a^{n-1} b^0 + a^{n-2} b^1 + a^{n-3} b^2\right) =$$

$$\overset{n=3}{=} (a-b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 + \cancel{a^2 b} + \cancel{ab^2} - \cancel{ba^2} - \cancel{bab} - b^3 =$$

......

...... $= a^3 - b^3$

---

**Teilaufgabe C:** Verwenden Sie die Formel aus Teilaufgabe B, um den Differenzenquotienten für $\mathrm{pot}_3$, $\mathrm{pot}_3(x) = x^3$, in möglichst einfacher Gestalt darzustellen. (Hinweis: Die Rollen von $a$ und $b$ in Teilaufgabe B werden nun von $x$ und $x_0$ übernommen.)

$$\frac{\mathrm{pot}_3(x) - \mathrm{pot}_3(x_0)}{x - x_0} = \ldots \frac{x^3 - x_0^3}{x - x_0} \overset{B}{=} \frac{\cancel{(x - x_0)} \cdot (x^2 + x x_0 + x_0^2)}{\cancel{x - x_0}} =$$

...... $= x^2 + x x_0 + x_0^2$

---

**Teilaufgabe D:** Berechnen Sie die Ableitung $\mathrm{pot}_3'(x_0)$ der Potenzfunktion $\mathrm{pot}_3$ an der Stelle $x_0 \in \mathbb{R}$, indem Sie gemäß Ihrer Definition aus Teilaufgabe A in dem Ausdruck aus Teilaufgabe C den Grenzwert $x \to x_0$ berechnen.

$$\mathrm{pot}_3'(x_0) = \ldots \lim_{x \to x_0} \frac{\mathrm{pot}_3(x) - \mathrm{pot}_3(x_0)}{x - x_0} \overset{C}{=} \lim_{x \to x_0} \left(x^2 + x x_0 + x_0^2\right) = x_0^2 + x_0 x_0 + x_0^2 = 3x_0^2$$

Ersetzt man darin $x_0$ durch $x$, so liest man daraus die vertraute Regel $(x^3)' = 3x^2$ ab.

**Aufgabe 4:** In dieser Aufgabe geht es um den Zusammenhang zwischen Differential- und Integralrechnung, der im Hauptsatz zum Ausdruck kommt. Im Zentrum steht dabei für zwei reelle Funktionen $F$ und $f$ die Formel $F' = f$, die allerdings näherer Spezifikationen bedarf. Im Folgenden sei stets ein Definitionsbereich $D$ der auftretenden Funktionen vorausgesetzt, der ein Intervall $[a, b]$ mit $a < b$ enthält.

---

**Teilaufgabe A:** Ist $F$ eine Stammfunktion von $f$ auf $[a, b]$, so bedeutet das nach Definition $F' = f$. Man spricht auch von einem unbestimmten Integral. So ein $F$ gibt es unter einer recht allgemeinen Voraussetzung an $f$, die Gegenstand von Teilaufgabe B ist. Und zwar kann man $F$ als bestimmtes Integral definieren, in dem die Variable $x$ vorkommt, wenn auch nicht als Integrationsvariable. Wie dann?

$F(x) :=$ ...... $\int_a^x f(t)\, dt$

---

**Teilaufgabe B:** Geben Sie eine hinreichende Bedingung an eine reelle Funktion $f$ an, so dass die Konstruktion aus Teilaufgabe A möglich ist.

Die Konstruktion ist sicher möglich, wenn $f$ ...... stetig ist.

---

**Teilaufgabe C:** Sei beispielsweise $f(x) = x^2$ und $F(x) = \frac{x^3}{3}$. Dann sind alle bisher relevanten Voraussetzungen erfüllt. In üblicher Weise lässt sich das Integral von $f$ auf dem Intervall $[a, b]$ gemäß $\int_a^b f(x)\, dx = F(b) - F(a) = \frac{b^3 - a^3}{3}$ berechnen. Formulieren Sie einen Satz über Stammfunktionen, der rechtfertigt, warum man statt $F$ auch irgendeine andere Stammfunktion $F_1$ von $f$ zur Berechnung nach diesem Schema heranziehen könnte.

Aus $F' = f = F_1'$ auf $[a, b]$ folgt, dass ..... es ein $c \in \mathbb{R}$ gibt mit $F_1(x) = F(x) + c$ für alle $x \in [a,b]$.

Daher ist auch $F_1(b) - F_1(a) =$ .. $(F(b)+c) - (F(a)+c) =$

$\ldots = F(b) - F(a)$.

---

**Teilaufgabe D:** Für $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, $f(x) := \frac{1}{x}$ erfüllt die Funktion $F_0(x) := \ln |x|$ die Gleichung $F_0' = f$, ist also eine Stammfunktion von $f$. Geben Sie sämtliche Stammfunktionen $F : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ von $f$ an. (Hinweis: Diese Frage hat mit Teilaufgabe C zu tun, ein gewisser Unterschied erfordert aber eine Modifikation, auf die es jetzt in erster Linie ankommt.)

Die Stammfunktionen von $f(x) = \frac{1}{x}$ auf $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ sind gegeben durch sämtliche Funktionen $F$ der Gestalt

...... $F(x) = \begin{cases} \ln(x) + C_+ & \text{für } x > 0 \\ \ln|x| + C_- & \text{für } x < 0 \end{cases}$ mit beliebigen Konstanten $C_+, C_- \in \mathbb{R}$.