Mathematik 1 für Bauingenieurwesen

Prüfung am 1.3.2019
Reinhard Winkler

Name (bitte ausfüllen):

Matrikelnummer (bitte ausfüllen):

Wichtige Hinweise bevor Sie beginnen:

- Die Prüfung besteht aus vier Aufgaben 1, 2, 3, 4, untergliedert in jeweils vier Teilaufgaben A, B, C, D. Zu jeder Teilaufgabe wird maximal ein Punkt vergeben. Ab 8 von 16 möglichen Punkten ist Ihnen eine positive Note sicher.
- Die Arbeitszeit beträgt 90 Minuten.
- Wenn in der Angabe nicht ausdrücklich anders vermerkt, wird zu jeder Teilaufgabe der Punkt (oder Teile eines Punktes) ausschließlich für das vergeben, was Sie unmittelbar neben bzw. unterhalb der Angabe dieser Teilaufgabe niedergeschrieben haben (und nicht unterhalb der horizontalen Trennlinie zur nächsten Teilaufgabe). Drei Punkte ... symbolisieren, dass Sie Ihre Eintragung an dieser Stelle machen bzw. beginnen, ein kleiner Kreis ○, dass Sie Zutreffendes ankreuzen sollen.

  In den meisten Fällen sollte der jeweils vorgesehene Platz für die Lösung der Aufgabe ausreichen. Es lohnt daher, wenn Sie sich, bevor Sie mit dem Schreiben beginnen, vergewissern, dass Sie Ihre Antwort entsprechend kurz fassen können. Sollten Sie längere Nebenrechnungen oder sonstige schriftliche Überlegungen durchführen wollen, stehen Ihnen dafür die beiden letzten Blätter dieses Heftes zur Verfügung. Was immer Sie auf den letzten beiden Blättern notieren, wird bei der Punkteauswertung ignoriert.
- Wenn Sie sich noch vor Ausführung der Details einen Überblick darüber verschaffen, was in den einzelnen Aufgaben und ihren Teilen zu tun ist, kann das hilfreich für eine kluge Zeiteinteilung sein.

Nur vom Prüfer auszufüllen:

Punkte für Aufgabe 1: Aufgabe 2: Aufgabe 3: Aufgabe 4:

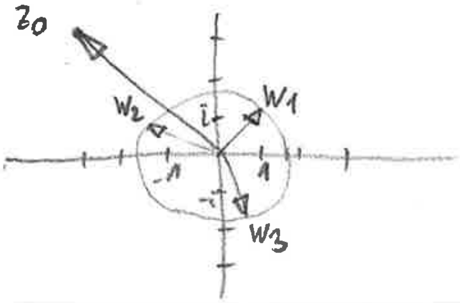
Gesamtpunktezahl:

Note:

Sonstige Bemerkungen:

Aufgabe 1: In dieser Aufgabe geht es u.a. um die komplexe Zahl $z_0 := -3 + 3i$ und jene drei (paarweise verschiedenen) komplexen Zahlen w_1, w_2, w_3 mit $w_i^3 = z_0$ für $i = 1, 2, 3$.

Teilaufgabe A: Skizzieren Sie z_0 sowie w_1, w_2 und w_3 in der komplexen Zahlenebene näherungsweise ohne Rechnung. (Hinweis: Sie dürfen die für die Skizze hinreichend genaue Näherung $1{,}6 < (3\sqrt{2})^{\frac{1}{3}} < 1{,}7$ verwenden.) Wählen Sie die Indizes der drei komplexen Zahlen w_i so, dass w_1 positiven Real- und Imaginärteil und w_2 negativen Realteil hat.



Teilaufgabe B: Finden Sie reelle Zahlen r und α mit $w_2 = re^{i\alpha}$ (w_2 wie in Teilaufgabe A). Geben Sie α sowohl in Grad- als auch in Bogenmaß an. Wurzelausdrücke müssen Sie nicht numerisch auswerten.

$r = \sqrt[3]{|z_0|} = \sqrt[3]{\sqrt{3^2+3^2}} = \sqrt[6]{18}$

$\alpha = \frac{90°+45°}{3} + 120° = 165° \mathrel{\widehat{=}} \frac{\frac{3\pi}{4}}{3} + \frac{2\pi}{3} = \left(\frac{1}{4}+\frac{2}{3}\right)\pi = \frac{11}{12}\pi$

Teilaufgabe C: Finden Sie ein quadratisches reelles Polynom p der Gestalt $p(x) = x^2 + ax + b$ mit $p(z_0) = 0$.

Die Rechnung … $p(x) = (x - z_0)\cdot(x - \bar{z}_0) = (x - (-3+3i))(x - (-3-3i)) =$
$= ((x+3) + 3i)((x+3) - 3i) = (x+3)^2 - (3i)^2 = x^2 + 6x + 9 + 9 =$
$= x^2 + 6x + 18$

zeigt

$a = 6$ und $b = 18$

Teilaufgabe D: Wie lassen sich aus Teilaufgabe C sämtliche quadratischen reellen Polynome q mit $q(z_0) = 0$ erzeugen?

Indem man p mit einer beliebigen … reellen Zahl $\neq 0$ multipliziert.

Aufgabe 2: Wir betrachten die reellen Folgen mit den Gliedern $a_n := \frac{1}{n}$ bzw. $b_n := (\frac{9}{10})^n = 0{,}9^n$, außerdem die daraus gebildeten Partialsummen $A_n := \sum_{i=1}^{n} a_n$ und $B_n := \sum_{i=1}^{n} b_n$.

Teilaufgabe A: Geben Sie die Glieder a_n und b_n für $n = 1, 2, 3, 4$ in Dezimaldarstellung an. Bricht diese nicht ab, so runden Sie auf zwei Nachkommastellen.

$a_1 =$ 1	$a_2 =$ 0,5	$a_3 \approx$ 0,33	$a_4 =$ 0,25
$b_1 =$ 0,9	$b_2 =$ 0,81	$b_3 =$ 0,729	$b_4 =$ 0,6561

Teilaufgabe B: Gibt es ein $n > 1$ mit $b_n < a_n$? Wenn ja, geben Sie ein solches an; wenn nein, dann begründen Sie das. (Hinweis: Aus Teilaufgabe A lässt sich die Ungleichung $b_4 = 0{,}9^4 < 0{,}7 < \sqrt{\frac{1}{2}}$ ablesen. Daraus folgt $b_{n+8} = b_n \cdot 0{,}9^8 < \frac{b_n}{2}$. Also fallen die b_n nach 8 Schritten stets auf weniger als die Hälfte.)

☒ So ein $n > 1$ gibt es, zum Beispiel $n :=$ 50, [Anm: weil $b_{50} = 0{,}9^{50} < 0{,}9^{48} = (0{,}9^8)^6 < (\frac{1}{2})^6 = \frac{1}{64} < \frac{1}{50} = a_{50}$; das kleinste n wäre $n = 34$]

○ So ein $n > 1$ gibt es nicht, weil …

Teilaufgabe C: Gibt es eine reelle Zahl K mit $A_n \leq K$ für alle $n = 1, 2, \ldots$? Wenn ja, geben Sie ein solches K an. Wenn nein, geben Sie an, wie man zu jedem vorgegebenen $K \in \mathbb{R}$ ein n_K mit $A_{n_K} > K$ finden kann. Hinweis: Verwenden Sie die Beziehung $A_n \geq \int_1^n \frac{1}{x}\, dx$.

○ So ein K gibt es, zum Beispiel $K := \ldots$

☒ So ein K gibt es nicht, weil man zu vorgegebenem $K \in \mathbb{R}$ stets ein beliebiges $n_K >$ e^K wählen kann.
[Anm: $n_K > e^K \Rightarrow A_{n_K} > \int_1^{e^K} \frac{1}{x}\, dx = \ln e^K - \ln 1 = K$]

Teilaufgabe D: Gibt es eine reelle Zahl K mit $B_n \leq K$ für alle $n = 1, 2, \ldots$? Wenn ja, geben Sie ein solches K an. Wenn nein, geben Sie an, wie man zu jedem vorgegebenen $K \in \mathbb{R}$ ein n_K mit $B_{n_K} > K$ finden kann.

☒ So ein K gibt es, zum Beispiel $K :=$ $\sum_{n=1}^{\infty} (0{,}9)^n = 0{,}9 \cdot \frac{1}{1-0{,}9} = 9$.

○ So ein K gibt es nicht, weil man zu vorgegebenem $K \in \mathbb{R}$ stets ein beliebiges $n_K > \ldots$ wählen kann.

Aufgabe 3: Wir betrachten die Funktion $f(x) := \frac{1}{x}$ und ihre Taylor- und Potenzreihendarstellung an der Entwicklungsstelle $x_0 = 1$.

Teilaufgabe A: Die Formel $f^{(n)}(x) = (-1)^n \frac{n!}{x^{n+1}}$ für die n-te Ableitung von f gilt offenbar für $n = 0$. Vervollständigen Sie einen Induktionsbeweis für diese Formel, indem Sie den Induktionsschritt durchführen und dabei markieren, wo Sie die Induktionsannahme (die sie nicht extra anschreiben müssen) verwenden.

$$f^{(n+1)}(x) = \ldots (f^{(n)})'(x) = \left((-1)^n \frac{n!}{x^{n+1}}\right)' = (-1)^n \frac{-(n+1)\cdot n!}{x^{(n+2)}} =$$

$$\ldots = \frac{(-1)^{n+1}\cdot(n+1)n!}{x^{(n+1)+1}} =$$

$$= \quad (-1)^{n+1}\frac{(n+1)!}{x^{(n+1)+1}}.$$

Teilaufgabe B: Ermitteln Sie eine Potenzreihendarstellung von f um den Entwicklungspunkt $x_0 = 1$, indem Sie unter Verwendung der Formel für die geometrische Reihe nachfolgende Rechnung fortsetzen und daraus die Koeffizienten a_n in der Darstellung $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-1)^n$ ablesen.

Die Rechnung

$$f(x) = \frac{1}{x} = \frac{1}{1-(1-x)} = \ldots \sum_{n=0}^{\infty}(1-x)^n = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(x-1)^n.$$

zeigt

$a_n = \ldots (-1)^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Teilaufgabe C: Für welche $x \in \mathbb{R}$ gilt die Potenzreihendarstellung von f in Teilaufgabe B? Beantworten Sie diese Frage, indem Sie den Konvergenzbereich $K \subseteq \mathbb{R}$ angeben.

$K = \ldots (0,2)$

Teilaufgabe D: Geben Sie eine Beziehung an, die es ermöglicht, aus Teilaufgaben B und C ohne Verwendung von Teilaufgabe A auf die Werte $f^{(n)}(1)$ sämtlicher höheren Ableitungen von f an der Stelle $x_0 = 1$ zu schließen. (Zur Kontrolle können Sie Ihr Ergebnis aus Teilaufgabe A natürlich verwenden.)

$$a_n = \frac{f^{(n)}(1)}{n!} \quad \Rightarrow \quad f^{(n)}(1) = a_n \cdot n! = (-1)^n \cdot n!$$

Aufgabe 4: Wir interessieren uns für diverse Eigenschaften und damit verbundene Kenngrößen der reellen Funktion $g(x) := xe^{-x}$.

Teilaufgabe A: Berechnen Sie die ersten beiden Ableitungen g' und g'' von g. Bestimmen Sie außerdem einen Punkt x_1, an dem sich das Monotonieverhalten, und einen Punkt x_2, an dem sich das Krümmungsverhalten von g ändert. Geben Sie die Werte von g und g' an den Stellen 0, x_1 und x_2 auf eine Nachkommastelle genau in dekadischer Darstellung an. (Hinweis: $e^{-1} \approx 0{,}37$.)

$g'(x) = (xe^{-x})' = x(-e^{-x}) + 1 \cdot e^{-x} = (1-x)e^{-x}$

$g''(x) = ((1-x)(e^{-x}))' = (1-x)\cdot(-e^{-x}) + (-1)e^{-x} = (x-2)e^{-x}$

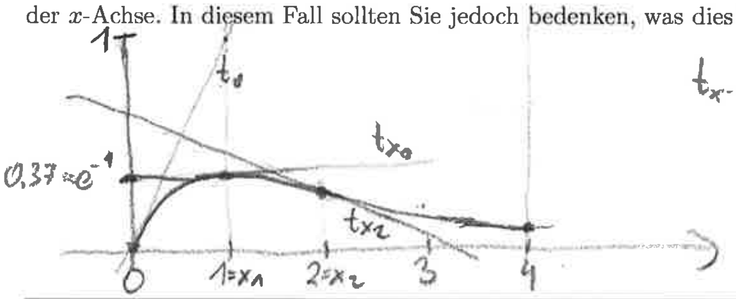
Nebenrechnung: $0{,}37 \cdot 0{,}37$
111
259
$0{,}1369$

$x_1 = 1$ $\qquad$ $x_2 = 2$

$g(0) = 0$ $\qquad$ $g(x_1) = e^{-1} \approx 0{,}4$ $\qquad$ $g(x_2) = 2e^{-2} \approx 2 \cdot 0{,}37^2 \approx 0{,}3$

$g'(0) = 1$ $\qquad$ $g'(x_1) = 0$ $\qquad$ $g'(x_2) = -e^{-2} \approx -0{,}1$

Teilaufgabe B: Fertigen Sie mit Hilfe der Werte aus Teilaufgabe A eine Skizze von g im Bereich $[0,4]$ samt Tangenten an den Stellen 0, x_1 und x_2 an. Hinweis: Wenn es Ihnen für die Darstellung vorteilhaft erscheint, können Sie die Einheiten auf der y-Achse größer wählen als auf der x-Achse. In diesem Fall sollten Sie jedoch bedenken, was dies für die Tangenten bedeutet.



t_x ... Tangente im Punkt $(x, g(x))$

Teilaufgabe C: Finden Sie eine Stammfunktion G von g.

Die Rechnung ... $\int xe^{-x}\,dx = -x\cdot(e^{-x}) - \int(-e^{-x})\,dx = -xe^{-x} - e^{-x} = -(1+x)e^{-x}$

partielle Integration

zeigt, dass $G(x) := -(1+x)e^{-x}$ eine Stammfunktion von g ist.

Teilaufgabe D: Das uneigentliche Integral $I := \int_0^\infty g(x)\,dx$ ist der Limes eigentlicher Riemann-Integrale, deren Wert sich mit Hilfe von Teilaufgabe C bestimmen lässt. Schreiben Sie I als solchen Limes an und bestimmen Sie daraus den Wert von I (endlich oder unendlich).

Der Limes $I = \lim_{b\to\infty} G(b) - G(0) = \lim_{b\to\infty} \underbrace{-(1+b)e^{-b}}_{\to 0} + (1+0)e^{-0} = 1$

...

hat den Wert 1.