# Mathematik 1 für Bauingenieurwesen

**Prüfung am 3.5.2019**
**Reinhard Winkler**

Name (bitte ausfüllen):

Matrikelnummer (bitte ausfüllen):

---

**Wichtige Hinweise bevor Sie beginnen:**

- Die Prüfung besteht aus vier Aufgaben 1, 2, 3, 4, untergliedert in jeweils vier Teilaufgaben A, B, C, D. Zu jeder Teilaufgabe wird maximal ein Punkt vergeben. Ab 8 von 16 möglichen Punkten ist Ihnen eine positive Note sicher.
- Die Arbeitszeit beträgt 90 Minuten.
- Wenn in der Angabe nicht ausdrücklich anders vermerkt, wird zu jeder Teilaufgabe der Punkt (oder Teile eines Punktes) ausschließlich für das vergeben, was Sie unmittelbar neben bzw. unterhalb der Angabe dieser Teilaufgabe niedergeschrieben haben (und nicht unterhalb der horizontalen Trennlinie zur nächsten Teilaufgabe). Drei Punkte ... symbolisieren, dass Sie Ihre Eintragung an dieser Stelle machen bzw. beginnen, ein kleiner Kreis ∘, dass Sie Zutreffendes ankreuzen sollen.

  In den meisten Fällen sollte der jeweils vorgesehene Platz für die Lösung der Aufgabe ausreichen. Es lohnt daher, wenn Sie sich, bevor Sie mit dem Schreiben beginnen, vergewissern, dass Sie Ihre Antwort entsprechend kurz fassen können. Sollten Sie längere Nebenrechnungen oder sonstige schriftliche Überlegungen durchführen wollen, stehen Ihnen dafür die beiden letzten Blätter dieses Heftes zur Verfügung. Was immer Sie auf den letzten beiden Blättern notieren, wird bei der Punkteauswertung ignoriert.
- Wenn Sie sich noch vor Ausführung der Details einen Überblick darüber verschaffen, was in den einzelnen Aufgaben und ihren Teilen zu tun ist, kann das hilfreich für eine kluge Zeiteinteilung sein.

---

Nur vom Prüfer auszufüllen:

Punkte für Aufgabe 1: Aufgabe 2: Aufgabe 3: Aufgabe 4:

Gesamtpunktezahl:

Note:

Sonstige Bemerkungen:

**Aufgabe 1:** In dieser Aufgabe geht es um Induktion, angewendet auf die Formel für die Partialsummen $s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$ der geometrischen Reihe mit den Gliedern $a_k = q^k$, $n \in \mathbb{N}$, für eine feste Zahl $q$.

---

**Teilaufgabe A:** Geben Sie eine Formel für $s_n$ im Fall $q = 1$. (In den Teilaufgaben B und C werden wir immer $q \neq 1$ voraussetzen.)

$s_n = n+1$

---

**Teilaufgabe B:** Für $q \neq 1$ und alle $n \in \mathbb{N}$ gilt bekanntlich die Formel $s_n = \frac{q^{n+1}-1}{q-1}$. In dieser und der folgenden Teilaufgabe soll diese Formel mittels Induktion bewiesen werden. Erklären Sie zunächst, warum der Induktionsanfang erfüllt ist.

$n=0 \Rightarrow s_0 = \sum_{k=0}^{0} q^k = q^0 = 1 = \frac{q-1}{q-1} = \frac{q^{0+1}-1}{q-1}$

---

**Teilaufgabe C:** Führen Sie in Fortsetzung von Teilaufgabe B den Induktionsschritt („Schluss von $n$ auf $n+1$“) für den Beweis der dort behaupteten Formel durch. Markieren Sie auch, an welcher Stelle Ihrer Argumentation Sie die Induktionsannahme verwenden.

Die Induktionsbehauptung folgt aus der Induktionsannahme $s_n = \frac{q^{n+1}-1}{q-1}$ wegen

$s_{n+1} = \ldots\ s_n + q^{n+1} \overset{\downarrow}{=} \frac{q^{n+1}-1}{q-1} + q^{n+1} = \frac{q^{n+1}-1+q^{n+1}(q-1)}{q-1} =$

$= \frac{q^{n+1}-1+q^{n+2}-q^{n+1}}{q-1} = \frac{q^{n+2}-1}{q-1} =$

$\ldots = \frac{q^{(n+1)+1}-1}{q-1}.$

---

**Teilaufgabe D:** Das Induktionsprinzip, das in den Teilaufgaben B und C verwendet wurde, kann allgemein wie folgt formuliert werden: Will man eine Aussage $\phi(n)$, die von der natürlichen Zahl abhängt, für alle $n \in \mathbb{N}$ beweisen, so betrachtet man die Menge $T$ aller $n \in \mathbb{N}$, für die die Aussage $\phi(n)$ gilt. Zu zeigen ist dann, dass $T$ alle $n \in \mathbb{N}$ enthält. Nach dem Induktionsprinzip ist das für eine beliebige Menge $T \subseteq \mathbb{N}$ der Fall, sofern zwei Aussagen über $T$ garantiert werden können. Die erste heißt Induktionsanfang und ist vergleichsweise einfach. Komplizierter ist die zweite, der sogenannte Induktionsschritt. Er ist von der Form: „Für alle $n \in \mathbb{N}$ folgt aus der sogenannten Induktionsannahme die sogenannte Induktionsbehauptung.“ Formulieren Sie für beliebiges $T \subseteq \mathbb{N}$ Induktionsanfang, Induktionsannahme und Induktionsbehauptung, so dass laut Induktionsprinzip aus Induktionsanfang und Induktionsschritt tatsächlich $T = \mathbb{N}$ folgt.

Induktionsanfang: $0 \in T$

Induktionsannahme: $n \in T$

Induktionsbehauptung: $n+1 \in T$

**Aufgabe 2:** Die irrationale Zahl $\sqrt[3]{2}$ soll durch rationale Zahlen angenähert werden, die mit Hilfe des Newtonverfahrens zu ermitteln sind.

---

**Teilaufgabe A:** Geben Sie eine (möglichst einfache) Polynomfunktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit ganzzahligen Koeffizienten an, die $\sqrt[3]{2}$ als einzige Nullstelle hat.

$f(x) := x^3 - 2$

Bem.: In der ursprünglichen Angabe fehlte die Forderung „mit ganzzahligen Koeffizienten", also war auch $f(x) = x - \sqrt[3]{2}$ korrekt.

---

**Teilaufgabe B:** Das Newtonverfahren dient zur iterativen Approximation einer gesuchten Nullstelle einer gegebenen differenzierbaren Funktion $f$. Liegt der $n$-te Näherungswert $x_n$ für die gesuchte Nullstelle von $f$ vor, so legt man im Punkt $(x_n, f(x_n))$ die Tangente $t_n$ an den Graphen von $f$. Die Nullstelle von $t_n$ lässt sich leicht berechnen und dient als $n+1$-ter Näherungswert $x_{n+1}$ für die gesuchte Nullstelle von $f$. Daraus ergibt sich (sofern stets $f'(x_n) \neq 0$ gilt) eine Rekursionsformel für die $x_n$. Diese Rekursionsformel ist von der Gestalt $x_{n+1} = T(x_n)$ mit einer Funktion $T$, in der auch $f$ und $f'$ vorkommen. Geben Sie dieses $T$ sowohl für den allgemeinen Fall als auch speziell für das $f$ aus Teilaufgabe A an.

Die allgemeine Form von $T$ lautet: $T(x) := x - \frac{f(x)}{f'(x)}$

Für $f$ aus Teilaufgabe A ist daher $T(x) := x - \frac{x^3-2}{3x^2} = x - \frac{x}{3} + \frac{2}{3x^2} = \frac{2}{3}\left(x + \frac{1}{x^2}\right)$

---

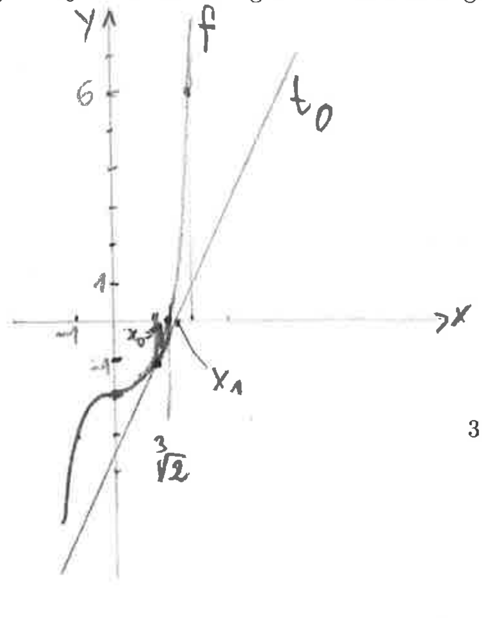
**Teilaufgabe C:** Für die Rekursion aus Teilaufgabe B mit dem $f$ aus Teilaufgabe A sei der Startwert $x_0 = 1$ vorgegeben. Berechnen Sie $x_1$ und $x_2$ ohne Taschenrechner als gekürzte Brüche.

$x_1 = \frac{2}{3}\left(x_0 + \frac{1}{x_0^2}\right) = \frac{2}{3}\left(1 + \frac{1}{1}\right) = \frac{4}{3}$

$x_2 = \frac{2}{3}\left(x_1 + \frac{1}{x_1^2}\right) = \frac{2}{3}\left(\frac{4}{3} + \frac{1}{16/9}\right) = \frac{2}{3}\left(\frac{4}{3} + \frac{9}{16}\right) = \frac{\cancel{2}}{3} \cdot \frac{64+27}{\cancel{48}_{24}} = \frac{91}{72}$

---

**Teilaufgabe D:** Skizzieren Sie die geometrische Interpretation des Newtonverfahrens für $f$ aus Teilaufgabe A. In Ihrer Skizze sollen $f$, die Nullstelle $\sqrt[3]{2}$ von $f$, die Stellen $x_0 = 1, x_1$ und die Tangente $t_0$ aus den Teilaufgaben B bzw. C eingezeichnet sein.



**Aufgabe 3:** Eine der wichtigsten unendlichen Reihen ist die Exponentialreihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ für die Exponentialfunktion $\exp(x) := e^x$ zur Basis $e$. Damit lässt sich die Zahl $e = \exp(1)$ sehr genau bestimmen. Hier soll mit Anleitung, aber ohne Taschenrechner die Ungleichung $2{,}7 < e < 2{,}8$ begründet werden.

---

**Teilaufgabe A:** Für $x = 1$ nimmt die Exponentialreihe definitionsgemäß den Wert $e$ an. Ihre Partialsummen haben die Gestalt $s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$ mit $a_k := \frac{1}{k!}$. Offenbar gilt $a_0 = a_1 = 1$ und $a_2 = 0{,}5$. Finden Sie jene ganzen Zahlen $z_3$ und $z_4$ mit

$\frac{z_3}{100} < a_3 < \frac{z_3+1}{100}$ und $\frac{z_4}{100} < a_4 < \frac{z_4+1}{100}$.

$\frac{1}{24} = 0{,}25 : 6 = 0{,}041\dot{6}$

Aus $a_3 = \frac{1}{3!} = \frac{1}{6} = 0{,}1\dot{6}$ folgt $z_3 = 16$

Aus $a_4 = \frac{1}{4!} = \frac{1}{24} = 0{,}041\dot{6}$ folgt $z_4 = 4$

---

**Teilaufgabe B:** Verwenden Sie Ihre Ergebnisse aus Teilaufgabe A, um $e > 2{,}7$ zu beweisen.

$e > s_4 \geq a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 \geq 1 + 1 + 0{,}5 + 0{,}16 + 0{,}04 = 2{,}7$

Bem: $s_4 = \frac{1}{24}(24 + 24 + 12 + 4 + 1) = \frac{65}{24}$ $\ldots \geq 2{,}7$

---

**Teilaufgabe C:** Die zweite gesuchte Ungleichung $e < \frac{28}{10} = 2{,}8$ folgt ähnlich, wenn zusätzlich eine hinreichend gute Abschätzung für den Reihenrest $r_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k!}$, $e = s_n + r_n$, nach oben zur Verfügung steht. Man kann so argumentieren: Die Summanden $\frac{1}{k!}$ werden im Schritt von $k$ auf $k+1$ (sofern $k \geq n+1$) um einen Faktor $\frac{1}{k+1} \leq \frac{1}{n+1} =: q < 1$ kleiner. Folglich gilt für $k = (n+1) + l \geq n+1$ stets (Induktion) $\frac{1}{k!} \leq \frac{1}{(n+1)!} \frac{1}{q^l}$. Daraus ergibt sich unter Verwendung der Formel für die unendliche geometrische Reihe die Abschätzung $e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = s_n + r_n$ mit

$$r_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k!} \leq \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)!} \cdot \frac{1}{q^l} = \frac{1}{(n+1)!} \cdot \frac{1}{1-q} = \frac{1}{(n+1)! \cdot (1 - \frac{1}{n+1})} = \frac{1}{n! \cdot n}.$$

Setzen Sie $n = 4$ und verwenden Sie Ihre früheren Ergebnisse, um daraus $e < 2{,}8$ zu schließen.

$e \leq s_4 + r_4 < 1 + 1 + 0{,}5 + 0{,}17 + 0{,}05 + \underbrace{\frac{1}{4! \cdot 4}}_{= \frac{1}{96} < 0{,}02} \leq 2{,}74 \leq$ $\ldots \leq 2{,}8$

---

**Teilaufgabe D:** Geben Sie ein möglichst kleines $n$ an, für das Sie mit Hilfe von Teilaufgabe C, die Fehlerabschätzung $|e - s_n| = r_n < 10^{-3}$ garantieren können. (Das tasächlich kleinste $n$ ist nicht unbedingt verlangt.)

Allfällige Nebenrechnungen: … $n = 5 \Rightarrow \frac{1}{n! n} = \frac{1}{5 \cdot 120} = \frac{1}{600} > 10^{-3}$

$n = 6 \Rightarrow \frac{1}{n! \cdot n} = \frac{1}{6 \cdot 720} < 10^{-3}$

Also folgt aus Teilaufgabe C für $n = 6$ die Abschätzung $|e - s_n| = r_n < 10^{-3}$.

**Aufgabe 4:** Gegenstand dieser Aufgabe ist die Funktion $f(x) := e^{\sqrt{x}}$, die auch auf dem Intervall $[0,4]$ integriert werden soll.

---

**Teilaufgabe A:** Berechnen Sie $f'$ und $f''$.

$f'(x) = \ldots \frac{1}{2\sqrt{x}} e^{\sqrt{x}}$

$f''(x) = \ldots \frac{1}{2\sqrt{x}} \left(\frac{1}{2\sqrt{x}} e^{\sqrt{x}}\right) - \frac{1}{4\sqrt{x^3}} e^{\sqrt{x}} = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sqrt{x^3}}\right) e^{\sqrt{x}}$

---

**Teilaufgabe B:** Bestimmen Sie jenes $x_0 \in [0,4]$, wo konkaver und konvexer Teil von $f$ aneinanderstoßen (Wendepunkt). Für $x>0$ gilt

Die Rechnung ... $f''(x)=0 \Leftrightarrow \frac{1}{x} = \frac{1}{\sqrt{x^3}} \Leftrightarrow x = \sqrt{x^3} \Leftrightarrow x^2 = x^3 \Leftrightarrow 1 = x$

zeigt $x_0 = \ldots 1$

---

**Teilaufgabe C:** Verwenden Sie die Variablensubstitution $\sqrt{x} = y$, um das Integral $\int_0^4 f(x)\,dx = \int_0^4 e^{\sqrt{x}}\,dx$ in ein Integral der Form $\int_0^b g(y)\,dy$ mit einem geeigneten Integranden $g(y)$ zu transformieren. Geben Sie auch die korrekte obere Grenze $b$ an.

$\int_0^4 e^{\sqrt{x}}\,dx = \ldots \left| \begin{array}{l} \sqrt{x} = y \\ x = y^2 \\ dx = 2y\,dy \end{array} \right| = \int_0^2 e^y\, 2y\, dy$

Also ist $b = \ldots 2 \ldots$ $\Leftarrow x=4 \Leftrightarrow y = \sqrt{x} = \sqrt{4} = 2$

und

$g(y) = \ldots 2y\,e^y$

---

**Teilaufgabe D:** Berechnen Sie das Integral, das Sie in Teilaufgabe C als Ergebnis erhalten haben, mittels partieller Integration. (Ausdrücke mit der Eulerschen Zahl $e$ müssen nicht numerisch ausgewertet werden.)

$\int_0^4 e^{\sqrt{x}}\,dx = \int_0^b g(y)\,dy = \ldots \int_0^2 \underbrace{2e^y}_{u'} \underbrace{y}_{v}\, dy = u\,v \Big|_{y=0}^{2} - \int_0^2 u \cdot v'\, dy = 2e^y \cdot y \Big|_{y=0}^{2} - \int_0^2 2e^y\, dy =$

$u'(y) = u(y) = 2e^y$
$v(y) = y, \quad v'(y) = 1$

$= 2e^2 2 - 2e^y \Big|_{y=0}^{2} = 2e^2 + 2.$