Mathematatik 1 für Bau- und Umweltingenieurwesen

Prüfung am 28.1.2021
Reinhard Winkler

Name (bitte ausfüllen):

Matrikelnummer (bitte ausfüllen):

Wichtige Hinweise bevor Sie beginnen:

- Die Prüfung besteht aus vier Aufgaben 1, 2, 3, 4, untergliedert in jeweils vier Teilaufgaben A, B, C, D. Zu jeder Teilaufgabe wird maximal ein Punkt vergeben. Ab 8 von 16 möglichen Punkten ist Ihnen eine positive Note sicher.
- Die Arbeitszeit beträgt 90 Minuten.
- Wenn in der Angabe nicht ausdrücklich anders vermerkt, wird zu jeder Teilaufgabe der Punkt (oder Teile eines Punktes) ausschließlich für das vergeben, was Sie unmittelbar neben bzw. unterhalb der Angabe dieser Teilaufgabe niedergeschrieben haben (und nicht unterhalb der horizontalen Trennlinie zur nächsten Teilaufgabe). Drei Punkte ... symbolisieren, dass Sie Ihre Eintragung an dieser Stelle machen bzw. beginnen, ein kleiner Kreis $\circ$, dass Sie Zutreffendes ankreuzen sollen.

  In den meisten Fällen sollte der jeweils vorgesehene Platz für die Lösung der Aufgabe ausreichen. Es lohnt daher, wenn Sie sich, bevor Sie mit dem Schreiben beginnen, vergewissern, dass Sie Ihre Antwort entsprechend kurz fassen können. Sollten Sie längere Nebenrechnungen oder sonstige schriftliche Überlegungen durchführen wollen, stehen Ihnen dafür die beiden letzten Blätter dieses Heftes zur Verfügung. Was immer Sie auf den letzten beiden Blättern notieren, wird bei der Punkteauswertung ignoriert.
- Wenn Sie sich noch vor Ausführung der Details einen Überblick darüber verschaffen, was in den einzelnen Aufgaben und ihren Teilen zu tun ist, kann das hilfreich für eine kluge Zeiteinteilung sein.

Nur vom Prüfer auszufüllen:

Punkte für Aufgabe 1: Aufgabe 2: Aufgabe 3: Aufgabe 4:

Gesamtpunktezahl:

Note:

Sonstige Bemerkungen:

Aufgabe 1: Eine einfache kombinatorische Aufgabe aus der Geometrie ist zu behandeln, u.a. mittels Induktion. Und zwar stelle man sich einen Kreis vor, auf dem n Punkte markiert sind, $n \in \mathbb{N}$. Diese Punkte bilden ein n-Eck. Für $n \geq 4$ können innerhalb dieses n-Ecks Diagonalen (d.h. Verbindungslinien zwischen zwei nicht unmittelbar benachbarten Eckpunkten, die also im Inneren des n-Ecks verlaufen) gezogen werden. Die Anzahl dieser Diagonalen bezeichnen wir mit d_n. Dann ist $d_0 = d_1 = d_2 = d_3 = 0$, $d_4 = 2$ etc. In dieser Aufgabe soll (mit Anleitung) eine explizite Formel für d_n gefunden und bewiesen werden.

Teilaufgabe A: Machen Sie eine Skizze der zu zählenden Diagonalen eines n-Ecks für $n = 5$ und $n = 6$ und lesen Sie daraus d_5 und d_6 ab.

Skizze für $n = 4$:

Also ist $d_4 = 2$

Skizze für $n = 5$:

$d_5 = \ldots 5$

Skizze für $n = 6$:

und $d_6 = \ldots 9$

Teilaufgabe B: Sicher gilt $d_{n+1} \geq d_n$, also $d_{n+1} = d_n + a_n$ mit gewissen $a_n \in \mathbb{N}$. Um die a_n zu bestimmen, gehen wir von einem n-Eck samt Diagonalen aus. Seien P_1 und P_n zwei benachbarte Eckpunkte, zwischen die wir nun einen weiteren Eckpunkt $P = P_{n+1}$ hinzufügen. Von diesem P lassen sich zu allen bereits vorhandenen Ecken außer P_1 und P_n weitere Diagonalen einzeichnen. Das sind $n-2$ Stück. Für $n \geq 3$ kommt aber noch eine weitere Diagonale hinzu. Denn die Verbindungslinie von P_1 und P_n, die vorher eine Seitenkante des n-Ecks war, wird nun zu einer Diagonale des $n+1$-Ecks. Aus dieser Überlegung ergeben sich für $n \geq 3$ (natürlich in Abhängigkeit von n) die Zahlen a_n in obiger Beziehung, nämlich:

$a_n = \ldots n-1$

Teilaufgabe C: Eine andere Überlegung führt sogar zu einer expliziten Formel für d_n und $n \geq 3$: In einem n-Eck gehen von jedem Eckpunkt Diagonalen zu allen Eckpunkten außer zu sich selbst und zu den beiden unmittelbar benachbarten Eckpunkten. Das sind für jeden Eckpunkt gleich viele. Wenn man diese Anzahl mit der Anzahl der Ecken multipliziert hat man jede Diagonale insgesamt doppelt gezählt. Daraus ergibt sich eine Formel für d_n (die wieder von n abhängt), nämlich:

$d_n = \ldots \frac{n \cdot (n-3)}{2}$

Teilaufgabe D: Durch den Anfangswert $b_3 := 0$ und $b_{n+1} := b_n + n - 1$ ist rekursiv eine beim Index $n = 3$ beginnende Folge definiert. Vervollständigen Sie den folgenden Induktionsbeweis für die Formel $b_n = \frac{n(n-3)}{2}$, $n \geq 3$. Markieren Sie dabei im Induktionsschritt die Stelle, wo sie die Induktionsvoraussetzung IV (auch Induktionsannahme genannt) verwenden.

Induktionsanfang: Für $n = \ldots 3$ gilt $\ldots$ $b_3 = 0 = \frac{3 \cdot (3-3)}{2}$

Induktionsschritt: $b_{n+1} = \ldots b_n + n - 1 \overset{IV}{=} \frac{n \cdot (n-3)}{2} + n - 1 = \frac{n^2 - 3n}{2} + \frac{2n-2}{2} =$

$= \frac{n^2 - n - 2}{2} = \frac{(n+1)(n-2)}{2}$ $\ldots = \frac{(n+1)((n+1)-3)}{2}$

Aufgabe 2: In dieser Aufgabe geht es um Nullstellen und Faktorisierung des Polynoms $f(x) := x^3 + x^2 + 4x + 4$.

Teilaufgabe A: Bekanntlich kommen für Polynome mit ganzzahligen Koeffizienten nur endlich viele rationale Nullstellen in Frage, nämlich jene gekürzten Brüche, deren Zähler und Nenner jeweils eine Teilbarkeitsbedingung erfüllen. Geben Sie eine (möglichst kleine) endliche Menge M rationaler Zahlen an, unter denen alle rationalen Nullstellen eines beliebigen Polynoms der Form $x^3 + a_2x^2 + a_1x + 4$ mit $a_1, a_2 \in \mathbb{Z}$ vorkommen, und bestimmen Sie daraus die Teilmenge $T \subseteq M$ der rationalen Nullstellen von f aus der Angabe oben.

$M = \{-4, -2, -1, 1, 2, 4\}$

$T = \{-1\}$

Teilaufgabe B: Ermitteln Sie die Menge K aller komplexen Nullstellen von f, die nicht reell sind. Hinweis: Dividieren Sie f durch einen geeigneten Linearfaktor.

Nebenrechnung: $(x^3+x^2+4x+4) : (x+1) = x^2+4$

x^3+x^2

$4x+4$

$-4x+4$

0 Rest

$x^2+4=0 \Leftrightarrow x \in \{2i, -2i\}$

$K = \{-2i, 2i\}$

Teilaufgabe C: Zerlegen Sie f in ein Produkt reell irreduzibler Polynome.

$f(x) = x^3 + x^2 + 4x + 4 = \ldots\ (x+1)\cdot(x^2+4)$

Teilaufgabe D: Entwickeln Sie f an der Stelle -1, d.h. finden Sie die Koeffizienten b_n ($n = 0, 1, 2, 3$) in der Darstellung $f(x) = \sum_{i=0}^{3} b_n(x+1)^n$.

Die Nebenrechnung ... C

$f(x) = x^3+x^2+4x+4 = (x+1)\cdot(x^2+4) = (x+1)\cdot(5+(x+1)\cdot(x-1)) =$

$(x^2+4):(x+1) = x-1$

$-x^2+x$

$-x+4$

$-x-1$

5 Rest

$\Rightarrow x^2+4 = (x+1)\cdot(x-1)+5$

$= \underbrace{0}_{b_0} + (x+1)\cdot(\underbrace{5}_{b_1} + (x+1)\cdot(\underbrace{-2}_{b_2} + (x+1)\cdot\underbrace{1}_{b_3}))$

$(x-1):(x+1) = 1$

$x+1$

-2 Rest

$\Rightarrow x-1 = (x+1)\cdot 1 - 2$

... zeigt:

$b_0 = 0$ $b_1 = 5$ $b_2 = -2$ $b_3 = 1$

Aufgabe 3: Diese Aufgabe dreht sich um höhere Ableitungen, Potenzreihen und Taylorpolynome der Funktion $f(x) := \cos(x^2)$.

Teilaufgabe A: Berechnen Sie die ersten beiden Ableitungen f' und f'' von f.

$f'(x) = \ldots -2x \cdot \sin(x^2)$

$f''(x) = \ldots (-2x)\cdot(2x)\cdot\cos(x^2) - 2\sin(x^2) = -4x^2\cos(x^2) - 2\sin(x^2)$

Teilaufgabe B: Die Funktion f hat eine Potenzreihendarstellung der Form $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Bestimmen Sie die Koeffizienten a_n, $n \in \mathbb{N}$. Hinweis: Verwenden Sie die wohlbekannte Potenzreihe für den Cosinus $\cos(y) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{y^{2n}}{(2n)!}$, setzen Sie $y = x^2$ und unterscheiden Sie drei Fälle:
1) n durch 8 teilbar, 2) n durch 4 aber nicht durch 8 teilbar, 3) n nicht durch 4 teilbar.

Die Rechnung
$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = f(x) = \cos(x^2) = \ldots \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(x^2)^{2n}}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{4n}}{(2n)!}$

zeigt im Fall 1) $a_n = \ldots \frac{1}{\frac{n}{2}!}$, im Fall 2) $a_n = \ldots -\frac{1}{\frac{n}{2}!}$, im Fall 3) $a_n = \ldots 0$

Teilaufgabe C: Geben Sie eine Formel für $f^{(n)}(0)$ an. Hinweis: Weil die Koeffizienten und einer Potenzreihe eng mit den höheren Ableitungen zusammenhängen, ist wieder dieselbe Fallunterscheidung wie in Teilaufgabe B zielführend:

Fall 1), n durch 8 teilbar: $f^{(n)}(0) = \ldots \frac{n!}{\frac{n}{2}!}$

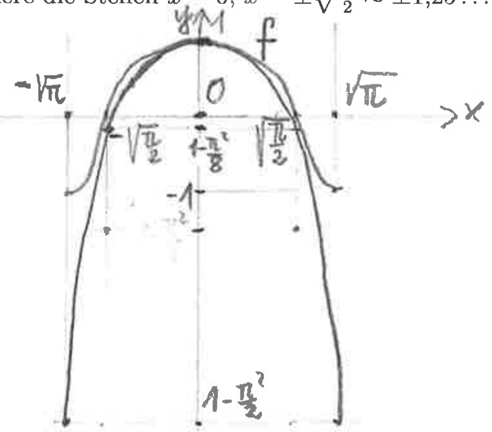
Fall 2), n durch 4 aber nicht durch 8 teilbar: $f^{(n)}(0) = \ldots -\frac{n!}{\frac{n}{2}!}$

Fall 3), n nicht durch 4 teilbar: $f^{(n)}(0) = \ldots 0$

Teilaufgabe D: Ermitteln Sie an der Entwicklungsstelle $x_0 = 0$ unter allen Taylorpolynomen t von f mit Grad < 8 jenes, dessen Grad maximal ist. Fertigen Sie außerdem eine Skizze für f und t im Bereich $[-\sqrt{\pi}, \sqrt{\pi}]$ an. Heben Sie insbesondere die Stellen $x = 0$, $x = \pm\sqrt{\frac{\pi}{2}} \approx \pm 1{,}25\ldots$ und $x = \pm\sqrt{\pi} \approx \pm 1{,}77\ldots$ hervor.

$t(x) = \ldots 1 - \frac{x^4}{2}$

Skizze:



$f(0) = 1$
$f(\pm\sqrt{\frac{\pi}{2}}) = \cos(\frac{\pi}{2}) = 0$
$f(\pm\sqrt{\pi}) = \cos(\pi) = -1$

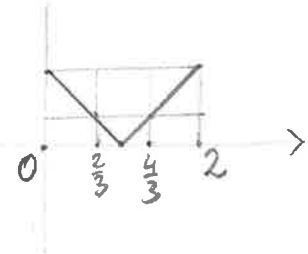
$\pi^2 \approx 10$

$t(0) = 1$
$t(\pm\sqrt{\frac{\pi}{2}}) = 1 - \frac{1}{2}(\sqrt{\frac{\pi}{2}})^4 = 1 - \frac{\pi^2}{8} \approx -0{,}12$
$t(\pm\sqrt{\pi}) = 1 - \frac{1}{2}(\sqrt{\pi})^4 = 1 - \frac{\pi^2}{2} \approx -4$

Aufgabe 4: Anhand der Funktion $f(x) := |x-1|$ im Integrationsbereich $[0,2]$ soll die Definition des Riemann-Integrals illustriert werden. Oft kann eine Skizze hilfreich sein.

Teilaufgabe A: Berechnen Sie Obersumme $O(f,Z)$ und Untersumme $U(f,Z)$ für das Integral $I := \int_0^2 f(x)\,dx$ bezüglich der Zerlegung $Z_3 = \{0, \frac{2}{3}, \frac{4}{3}, 2\}$ des Integrationsbereichs $[0,2]$ in drei gleich lange Teilintervalle. Stellen Sie $O(f,Z)$ und $U(f,Z)$ sowohl als Bruch wie auch als periodische Dezimalzahl dar.

Aus der Skizze (die auch für Teilaufgabe B nützlich ist)



liest man ab:

$O(f, Z_3) = \ldots \frac{2}{3}\left(1+\frac{1}{3}+1\right) = \frac{2}{3}\cdot\frac{7}{3} = \frac{14}{9} = 1{,}55\ldots = 1{,}\bar{5}$

und

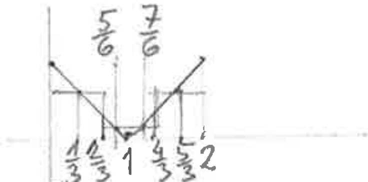
$U(f, Z_3) = \ldots \frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}+0+\frac{1}{3}\right) = \frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3} = \frac{4}{9} = 0{,}44\ldots = 0{,}\dot{4}$

Teilaufgabe B: Geben Sie den Wert des Integrals I aus Teilaufgabe A anhand elementarer geometrischer Überlegungen (siehe Skizze aus Teilaufgabe A) und ohne Verwendung des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung an.

$I = \ldots 1$

Teilaufgabe C: Mit der Notation aus Teilaufgabe A ist ein b derart anzugeben, dass für die Belegung $B_3 = \{\frac{1}{3}, b, \frac{5}{3}\}$ zur Zerlegung $Z_3 = \{0, \frac{2}{3}, \frac{4}{3}, 2\}$ die entsprechende Riemannsumme $S(f, Z_3, B_3)$ den exakten Wert I annimmt.

Die Skizze …



zeigt, dass für $b = \ldots 5/6 \ldots$ die gewünschte Beziehung $S(f, Z_3, B_3) = I$ gilt. (Hinweis: Es gibt genau zwei korrekte Werte für b.) Bem: $b = \frac{7}{6}$ ist der andere.

Teilaufgabe D: Die Funktion f ist stetig, also auch Riemann-integrierbar. Folglich gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta(\varepsilon) > 0$ derart, dass für beliebige Zerlegungen Z von $[0,2]$ mit einer Feinheit $\|Z\| < \delta(\varepsilon)$ und beliebige Belegungen B zu Z die Fehlerabschätzung $|S(f,Z,B) - I| < \varepsilon$ gilt. Definieren Sie $\delta(\varepsilon)$ in Abhängigkeit von ε so, dass dies garantiert ist. (Hinweis: Die Länge des Integrationsintervalls ist 2. Außerdem ist f stetig und hat, abgesehen von der „Ecke“ bei $x = 1$, überall eine Steigung vom Betrag ≤ 1. Diese Informationen alleine genügen, um ein geeignetes $\delta(\varepsilon)$ anzugeben.)

$\delta(\varepsilon) := \ldots \frac{\varepsilon}{2}$