Mathematatik 1 für Bau- und Umweltingenieurwesen

Prüfung am 2.2.2021
Reinhard Winkler

Name (bitte ausfüllen):

Matrikelnummer (bitte ausfüllen):

Wichtige Hinweise bevor Sie beginnen:

- Die Prüfung besteht aus vier Aufgaben 1, 2, 3, 4, untergliedert in jeweils vier Teilaufgaben A, B, C, D. Zu jeder Teilaufgabe wird maximal ein Punkt vergeben. Ab 8 von 16 möglichen Punkten ist Ihnen eine positive Note sicher.
- Die Arbeitszeit beträgt 90 Minuten.
- Wenn in der Angabe nicht ausdrücklich anders vermerkt, wird zu jeder Teilaufgabe der Punkt (oder Teile eines Punktes) ausschließlich für das vergeben, was Sie unmittelbar neben bzw. unterhalb der Angabe dieser Teilaufgabe niedergeschrieben haben (und nicht unterhalb der horizontalen Trennlinie zur nächsten Teilaufgabe). Drei Punkte ... symbolisieren, dass Sie Ihre Eintragung an dieser Stelle machen bzw. beginnen, ein kleiner Kreis ◦, dass Sie Zutreffendes ankreuzen sollen.

  In den meisten Fällen sollte der jeweils vorgesehene Platz für die Lösung der Aufgabe ausreichen. Es lohnt daher, wenn Sie sich, bevor Sie mit dem Schreiben beginnen, vergewissern, dass Sie Ihre Antwort entsprechend kurz fassen können. Sollten Sie längere Nebenrechnungen oder sonstige schriftliche Überlegungen durchführen wollen, stehen Ihnen dafür die beiden letzten Blätter dieses Heftes zur Verfügung. Was immer Sie auf den letzten beiden Blättern notieren, wird bei der Punkteauswertung ignoriert.
- Wenn Sie sich noch vor Ausführung der Details einen Überblick darüber verschaffen, was in den einzelnen Aufgaben und ihren Teilen zu tun ist, kann das hilfreich für eine kluge Zeiteinteilung sein.

Nur vom Prüfer auszufüllen:

Punkte für Aufgabe 1: Aufgabe 2: Aufgabe 3: Aufgabe 4:

Gesamtpunktezahl:

Note:

Sonstige Bemerkungen:

Aufgabe 1: Bekanntlich ist jede Relation R eine Teilmenge des kartesischen Produktes $A \times B$ zweier Mengen A und B. Jede Funktion $f : A \to B$ ist eine solche Relation mit einer zusätzlichen Eigenschaft. Um diese Eigenschaft geht es in dieser Aufgabe, außerdem um Injektivität, Surjektivität und Bijektivität.

Teilaufgabe A: Worauf kommt es an, damit eine Teilmenge $f \subseteq A \times B$ (also eine Menge von gewissen geordneten Paaren (a, b) mit $a \in A$ und $b \in B$) eine *Funktion* $f : A \to B$ ist? Formulieren Sie Ihre Antwort unter Verwendung der Symbole $\forall$ („für alle"), $\exists!$ („existiert genau ein") und $\in$ („ist Element von").

Ein solches f ist genau dann eine Funktion, wenn ...

$\forall a \in A \quad \exists! \, b \in B : \quad (a, b) \in f$

Teilaufgabe B: Im Folgenden sei speziell $A = B = \mathbb{N}$ und R die Relation $\leq$ auf $\mathbb{N}$, also $R = \{(a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : \ a \leq b\}$. Geben Sie eine Funktion $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $f \subseteq R$ an (in der also nur Paare (a, b) mit $a \leq b$ vorkommen), die überdies *surjektiv* ist.

$f(n) := \ldots n$

Teilaufgabe C: Ähnlich der Teilaufgabe B, nur ist jetzt eine Funktion $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $g \subseteq R$ gesucht, die *injektiv*, aber *nicht surjektiv* ist.

$g(n) := \ldots 2n$

Teilaufgabe D: Ähnlich den Teilaufgaben B und C, nur ist jetzt eine Funktion $h : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $h \subseteq R$ gesucht, die *bijektiv* ist.

$h(n) := \ldots n$

Aufgabe 2: In dieser Aufgabe geht es um die Grundbegriffe und ein einfaches Beispiel zur Theorie der Reihen. Gegeben sei dazu eine Folge reeller Zahlen a_n, $n \in \mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$.

Teilaufgabe A: Wie sind die zugehörigen Partialsummen s_n rekursiv definiert?

$s_0 := \ldots a_0$

$s_{n+1} := \ldots s_n + a_{n+1}$

Teilaufgabe B: Wie ist der Wert s der (unendlichen) Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ definiert? Sie dürfen die s_n aus Teilaufgabe A und das Symbol $\lim_{n\to\infty}$ für den Grenzwert verwenden, zunächst ohne es näher zu erklären (was Inhalt von Teilaufgabe C sein wird).

$s := \ldots \lim_{n \to \infty} s_n$

Teilaufgabe C: Machen Sie die Definition aus Teilaufgabe B unter Verwendung logischer Quantoren explizit, indem Sie eine Formel angeben, durch welche die Beziehung $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = s$ definiert werden kann. Hinweis: In verbaler Form würde die gesuchte Formel beginnen mit „Für alle positiven $\varepsilon \ldots$."

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq n_0 : \quad |s_n - s| < \varepsilon$$

Teilaufgabe D: Sei nun speziell $a_n = \frac{1}{2^n}$. Dann gilt $s = \sum_{n=0}^{\infty} a_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots = 2$. Geben Sie für vier vorgegebene Werte von $\varepsilon > 0$ Zahlen $n_0(\varepsilon)$ derart an, dass für alle $n \geq n_0(\varepsilon)$ gilt: $|s_n - 2| < \varepsilon$. Die vorgegebenen Werte sind $\varepsilon = \frac{1}{10}, \frac{1}{100}, \frac{1}{1000}, \frac{1}{1000000}$.

$n_0(\frac{1}{10}) = \ldots 4$

$n_0(\frac{1}{100}) = \ldots 7$

$n_0(\frac{1}{1000}) = \ldots 10$

$n_0(\frac{1}{1000000}) = \ldots 20$

Aufgabe 3: Es geht um eine bestimmte Potenzreihe und um Polynome, die Sie kennen sollten.

Teilaufgabe A: Finden Sie eine Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, die eine Funktion f mit $f(0) = 1$ und $f' = f$ darstellt. Es genügt, wenn Sie eine Formel für die a_n angeben.

$a_n = \ldots \frac{1}{n!}$

Teilaufgabe B: Geben Sie für beliebiges $n \in \mathbb{N}$ ein Polynom $p_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ vom Grad n an, dessen höhere Ableitungen die Bedingungen $p_n^{(k)}(0) = 1$ für $k = 0, 1, \ldots, n$ erfüllen. Es genügt, wenn Sie eine Formel für die a_k angeben.

$a_k = \ldots \frac{1}{k!}$

Teilaufgabe C: Das Cauchyprodukt zweier Reihen $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ und $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$, nun mit beliebigen Gliedern $a_n, b_n \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$, ist wieder als Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ mit gewissen Gliedern c_n definiert. Nach welcher Formel errechnen sich die c_n definitionsgemäß aus den a_n und b_n?

$c_n := \ldots \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$

Teilaufgabe D: Seien in Teilaufgabe C nun speziell die $a_n := \frac{x^n}{n!}$ abhängig von einer Variablen x und die $b_n := \frac{y^n}{n!}$ von einer Variablen y. Die c_n hängen dann auch von x und y ab. Geben Sie eine möglichst einfache (d.h. aus möglichst wenigen Symbolen bestehende) Formel für die c_n an.

$c_n := \ldots \frac{(x+y)^n}{n!}$

Aufgabe 4: Es geht um Integrale und Stammfunktionen. Im Hintergrund ist somit auch der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung wirksam. Durchwegs sei $f(x) := |x|$ die Betragsfunktion.

Teilaufgabe A: Geben Sie durch Unterscheidung der Fälle $x \geq 0$ und $x < 0$ eine Stammfunktion F von f an, die $F(0) = 0$ erfüllt.

Für $x \geq 0$ sei $F(x) := \ldots \frac{x^2}{2} \ldots$, für $x < 0$ sei $F(x) := \ldots -\frac{x^2}{2}$

Dann ist F eine Stammfunktion von f.

Teilaufgabe B: Verzichtet man auf die Bedingung $F(0) = 0$, so gibt es auch andere Stammfunktionen von f. Beschreiben Sie die Menge aller Stammfunktionen von f.

Hinweis: In natürlicher Weise lässt sich zu jedem $c \in \mathbb{R}$ genau eine Stammfunktion F_c von f mit einer charakteristischen Eigenschaft finden. Es genügt daher, wenn Sie für beliebig vorgegebenes $c \in \mathbb{R}$ das entsprechende F_c angeben. Die Funktion F aus Teilaufgabe A dürfen Sie verwenden.

$F_c(x) := \ldots F(x) + c$

Teilaufgabe C: Berechnen Sie für beliebig vorgegebene Zahlen $a < b \in \mathbb{R}$ das Integral $\int_a^b f(x)\,dx$. Unterscheiden Sie dabei die Fälle $a < b < 0$, $a < 0 \leq b$ und $0 \leq a < b$.

Für $a < b < 0$ gilt: $\int_a^b f(x)\,dx = \ldots \frac{a^2-b^2}{2}$

Für $a < 0 \leq b$ gilt: $\int_a^b f(x)\,dx = \ldots \frac{a^2+b^2}{2}$

Für $0 \leq a < b$ gilt: $\int_a^b f(x)\,dx = \ldots \frac{b^2-a^2}{2}$

Teilaufgabe D: Wählen Sie die Stammfunktion F von f aus Teilaufgabe A. Sei D_n die Menge aller $x \in \mathbb{R}$, an denen F eine n-te Ableitung $F^{(n)}$ hat, d.h. n-mal differenzierbar ist. S_n sei die Menge aller $x \in \mathbb{R}$, an denen $F^{(n)}$ sogar stetig ist. Entsprechend sei D_∞ die Menge aller $x \in \mathbb{R}$, an denen F unendlich oft (stetig) differenzierbar ist. Es gilt:
$\mathbb{R} = D_0 \supseteq S_0 \supseteq D_1 \supseteq S_1 \supseteq D_2 \supseteq S_2 \supseteq D_3 \supseteq \ldots \supseteq D_\infty = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
Folglich gilt in dieser unendlichen Kette von absteigenden Mengeninklusionen genau an einer Stelle eine der beiden Ungleichungen (A) $\mathbb{R} = D_n \neq S_n = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ oder (B) $\mathbb{R} = S_n \neq D_{n+1} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Für welches n ist das der Fall? Gilt für dieses n (A) oder (B)?

Das ist für $n = \ldots 1$ der Fall. Für dieses n gilt (.B).