Mathematik 1 für Bau- und Umweltingenieurwesen

Prüfung am 30.4.2021
Reinhard Winkler

Name (bitte ausfüllen): LÖSUNGEN

Matrikelnummer (bitte ausfüllen):

Wichtige Hinweise bevor Sie beginnen:

- Die Prüfung besteht aus vier Aufgaben 1, 2, 3, 4, untergliedert in jeweils vier Teilaufgaben A, B, C, D. Zu jeder Teilaufgabe wird maximal ein Punkt vergeben. Ab 8 von 16 möglichen Punkten ist Ihnen eine positive Note sicher.
- Die Arbeitszeit beträgt 90 Minuten.
- Wenn in der Angabe nicht ausdrücklich anders vermerkt, wird zu jeder Teilaufgabe der Punkt (oder Teile eines Punktes) ausschließlich für das vergeben, was Sie unmittelbar neben bzw. unterhalb der Angabe dieser Teilaufgabe niedergeschrieben haben (und nicht unterhalb der horizontalen Trennlinie zur nächsten Teilaufgabe). Drei Punkte ... symbolisieren, dass Sie Ihre Eintragung an dieser Stelle machen bzw. beginnen, ein kleiner Kreis ○, dass Sie Zutreffendes ankreuzen sollen.

  In den meisten Fällen sollte der jeweils vorgesehene Platz für die Lösung der Aufgabe ausreichen. Es lohnt daher, wenn Sie sich, bevor Sie mit dem Schreiben beginnen, vergewissern, dass Sie Ihre Antwort entsprechend kurz fassen können. Sollten Sie längere Nebenrechnungen oder sonstige schriftliche Überlegungen durchführen wollen, stehen Ihnen dafür die beiden letzten Blätter dieses Heftes zur Verfügung. Was immer Sie auf den letzten beiden Blättern notieren, wird bei der Punkteauswertung ignoriert.
- Wenn Sie sich noch vor Ausführung der Details einen Überblick darüber verschaffen, was in den einzelnen Aufgaben und ihren Teilen zu tun ist, kann das hilfreich für eine kluge Zeiteinteilung sein.

Nur vom Prüfer auszufüllen:

Punkte für Aufgabe 1: Aufgabe 2: Aufgabe 3: Aufgabe 4:

Gesamtpunktezahl:

Note:

Sonstige Bemerkungen:

Aufgabe 1: Für die Quadratsummen $s_n := \sum_{k=0}^{n} k^2$ soll mittels Induktion eine Formel bewiesen werden. Diese verwenden wir, um (ohne auf den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung zurückzugreifen) das Integral $\int_0^b f(x)\,dx$ mit $f(x) = x^2$ und $b > 0$ zu berechnen.

Teilaufgabe A: Sei $a_n := \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$. Wir wollen mittels Induktion $s_n = a_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ beweisen. Für $n = 0$ gilt die Behauptung offensichtlich wegen $s_0 = 0 = a_0$. Im Induktionsschritt ist aus der Induktionsvoraussetzung $s_n = a_n$ (IV) für ein festes aber beliebiges $n \in \mathbb{N}$ die Gleichheit $s_{n+1} = a_{n+1}$ zu folgern. Das gelingt mit der folgenden Rechnung, die zu vervollständigen Ihre Aufgabe ist. Überspringen Sie keine wichtigen Rechenschritte und markieren Sie jene Stelle mit „IV", an der Sie die Induktionsvoraussetzung verwenden:

$$s_{n+1} = s_n + (n+1)^2 \overset{\text{IV}}{=} \ldots\ a_n + (n+1)^2 = \frac{1}{6} n (n+1)(2n+1) + (n+1)^2 =$$

$$= \frac{1}{6}(n+1)\cdot\big(n(2n+1) + 6(n+1)\big) = \frac{1}{6}(n+1)(2n^2+7n+6) =$$

$$= \frac{1}{6}(n+1)(n+2)(2n+3) \ldots = \frac{1}{6}(n+1)((n+1)+1)(2(n+1)+1) = a_{n+1}$$

Teilaufgabe B: Für das Intervall $[0,b]$ und $n \in \mathbb{N}$ sei die Zerlegung $Z_n = \{x_k : k = 0,1,\ldots,n\}$ mit $x_k = \frac{k}{n}b$, also in n gleich lange Teilintervalle gegeben. Berechnen Sie mit Hilfe von Teilaufgabe A die Untersumme $U(f, Z_n)$ für die konkrete Funktion $f(x) = x^2$.

$$U(f,Z_n) = \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1}) \cdot \inf\{f(x) :\ x_{k-1} \le x \le x_k\} = \ldots \sum_{k=1}^{n} \frac{b}{n} f(x_{k-1}) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{b}{n}\left(\frac{k-1}{n} b\right)^2 = \sum_{k=1}^{n} \frac{b^3}{n^3}(k-1)^2 = \frac{b^3}{n^3}\sum_{k=1}^{n-1} k^2 = \frac{b^3}{n^3}\frac{1}{6}(n-1)n(2n-1) =$$

$$= b^3 \frac{1}{6}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(2-\frac{1}{n}\right)$$

Teilaufgabe C: Ganz ähnlich wie die Untersumme $U(f, Z_n)$ in Teilaufgabe B lässt sich (lediglich mit sup statt inf) auch die Obersumme $O(f, Z_n)$ für $f(x) = x^2$ berechnen. Wegen der Monotonie von $f(x) = x^2$ ist es aber leichter, die Differenz $d_n := O(f, Z_n) - U(f, Z_n)$ anzugeben. Tun Sie das.

$$d_n = \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1}) \cdot (f(x_k) - f(x_{k-1})) = \ldots \sum_{k=1}^{n} \frac{b}{n}\big(f(x_k) - f(x_{k-1})\big) =$$

$$= \frac{b}{n}\big(f(x_n) - f(x_0)\big) = \frac{b}{n}\big(f(b) - f(0)\big) = \frac{b}{n}(b^2 - 0^2) = \frac{b^3}{n}$$

Teilaufgabe D: Aus Teilaufgabe C erkennt man $\lim\limits_{n\to\infty} d_n = 0$, folglich berechnet sich das gesuchte Integral $\int_0^b x^2\,dx$ mit Hilfe von Teilaufgabe B als

$$\int_0^b x^2\,dx = \int_0^b f(x)\,dx = \ldots \lim_{n\to\infty} U(f,Z_n) = \lim_{n\to\infty} b^3 \frac{1}{6}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(2-\frac{1}{n}\right) = \frac{b^3}{3}$$

Aufgabe 2: Gegeben ist die Funktion $f(x) := \dfrac{x^2 - 5x + 5}{x - 3}$ für $x \in \mathbb{R} \setminus \{3\}$. Man kann $f(x)$ schreiben als $f(x) = g(x) + c \cdot x$ mit einer Funktion $g(x)$, für die $\lim\limits_{x \to \infty} g(x) = \alpha \in \mathbb{R}$ existiert, und einer Zahl $c \in \mathbb{R}$. Solch ein c und g sollen gefunden und damit die Funktion f samt Asymptote dargestellt werden.

Teilaufgabe A: Ermitteln Sie ein Polynom $p(x)$ und einen Rest $r \in \mathbb{R}$, sodass $x^2 - 5x + 5 = (x-3)p(x) + r$ gilt.

$$(x^2 - 5x + 5) : (x - 3) = x - 2$$

Aus der Polynomdivision ...

$$\begin{array}{l} -(x^2 - 3x) \\ \hline -2x + 5 \\ -(-2x + 6) \\ \hline -1 \end{array}$$

ergibt sich $p(x) = x - 2$ und $r = -1$

Teilaufgabe B: Aus Teilaufgabe A ergibt sich die Darstellung $f(x) = p(x) + \frac{r}{x-3}$. Lesen Sie daraus nach einer geeigneten Umformung den Wert $c \in \mathbb{R}$ sowie die Funktion g aus der Angabe ab.

$f(x) = p(x) + \frac{r}{x-3} = \dots x - 2 - \dfrac{1}{x-3} = \underbrace{1}_{c} \cdot x + \underbrace{\left(-2 - \dfrac{1}{x-3}\right)}_{g(x)}$

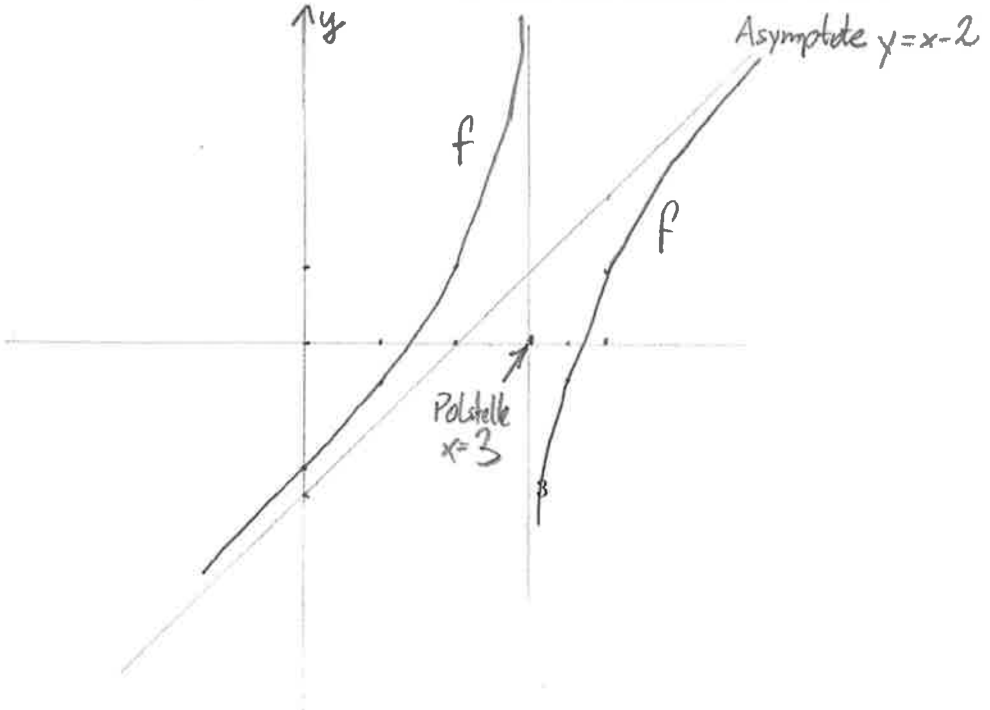
Hieraus ergibt sich:

$c = 1$ und $g(x) = -2 - \dfrac{1}{x-3}$

Teilaufgabe C:
Sei $\alpha \in \mathbb{R}$ so, dass es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine reelle Zahl $x_0 = x_0(\varepsilon)$ gibt derart, dass für alle $x \in \mathbb{R}$ aus $|x| > x_0$ folgt, dass $|g(x) - \alpha| < \varepsilon$ gilt. Bestimmen Sie so ein α.

Der gesuchte Wert ist $\alpha = -2$

Teilaufgabe D: Skizzieren Sie die Funktion f samt Asymptote und Polstelle. Jedenfalls soll dabei auch das qualitative Verhalten in der Nähe der Polstelle zu erkennen sein.



Aufgabe 3: Gegeben sei das Polynom $p(x) := x^4 - x^3 + 4x^2 - x + 3$. Es geht um Nullstellen und Faktorisierung von p.

Teilaufgabe A: Das Polynom kann auch als komplexe Funktion $p : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto p(z)$ aufgefasst werden. Berechnen Sie $p(i)$ für die imaginäre Einheit i.

$p(i) = \ldots i^4 - i^3 + 4i^2 - i + 3 = 1 + i - 4 - i + 3 = 0$

Teilaufgabe B: Geben Sie einen quadratischen Faktor p_1 von p an, der reell irreduzibel ist. Hinweis: Wenn Sie Teilaufgabe A korrekt gelöst haben, lässt sich p_1 daraus sehr leicht ablesen.

$p_1(x) = \ldots (x-i)(x+i) = x^2+1$

Teilaufgabe C: Finden Sie ein Polynom p_2 mit $p(x) = p_1(x)p_2(x)$.

Die Rechnung $(x^4 - x^3 + 4x^2 - x + 3) : (x^2+1) = x^2 - x + 3$

$$\begin{array}{l} -x^4 \quad \pm x^2 \\ \hline -x^3 + 3x^2 - x + 3 \\ \mp x^3 \quad\quad \mp x \\ \hline 3x^2 + 3 \\ -3x^2 \quad -3 \\ \hline 0 \text{ Rest} \end{array}$$

zeigt: $p_2(x) = x^2 - x + 3$

Teilaufgabe D: Untersuchen Sie p_2 aus Teilaufgabe C auf reelle Irreduzibilität und ermitteln Sie alle Nullstellen von p.

Die Rechnung $x_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - 3} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1-12}{4}} = \frac{1 \pm i\sqrt{11}}{2} \notin \mathbb{R}$

zeigt (bitte Richtiges ankreuzen):

☒ p_2 ist reell irreduzibel

☐ $p_2 = q_1 \cdot q_2$ zerfällt in die beiden reell irreduziblen Faktoren

$q_1(x) = \ldots\ldots$ und $q_2(x) = \ldots\ldots$

Folglich sind sämtliche (reelle oder komplexe) Nullstellen $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ von p gegeben durch:

$\alpha_1 = \ldots i \ldots$ $\quad \alpha_2 = \ldots -i \ldots$ $\quad \alpha_3 = \ldots \frac{1+i\sqrt{11}}{2} \ldots$ $\quad \alpha_4 = \ldots \frac{1-i\sqrt{11}}{2}$

Aufgabe 4: Bekanntlich lässt sich die Funktion $\ln(1+x)$ (mit dem natürlichen Logarithmus ln) für $|x| < 1$ durch die logarithmische Reihe darstellen. Bricht man die Reihe nach der n-ten Potenz ab, erhält man das Taylorpolynom t_n vom Grad $\leq n$. Wir schreiben:

$$\ln(1+x) = t_n(x) + r_n(x) \quad \text{mit} \quad t_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} x^k \quad \text{und} \quad r_n(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} x^k$$

Damit soll nun gearbeitet werden.

Teilaufgabe A: Schreiben Sie die Taylorpolynome t_0, t_1, t_2 und t_3 explizit an und ordnen Sie danach ihre Werte für $x \in (0,1)$ der Größe nach. (Hinweis: Leibnizreihe)

$t_0(x) = 0$ $\quad$ $t_1(x) = x$ $\quad$ $t_2(x) = x - \frac{x^2}{2}$ $\quad$ $t_3(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$

Ordnen Sie jetzt für $x \in (0,1)$ die $t_0(x), t_1(x), t_2(x)$ und $t_3(x)$ ihrer Größe nach:

$t_0 \quad < \quad t_2 \quad < \quad t_3 \quad < \quad t_1$

Teilaufgabe B: Geben Sie $\ln(\frac{3}{2})$ auf eine Nachkommastelle gerundet an.
(Hinweis: $\ln(\frac{3}{2}) = \ln(1+\frac{1}{2}) = \lim_{n\to\infty} t_n(\frac{1}{2})$ und nochmals Leibnizreihe.)

Platz für Nebenrechnung: $t_n(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2} - \frac{1}{8} + \frac{1}{24} - \frac{1}{64} + \ldots \approx \underbrace{\overbrace{0{,}5 - 0{,}125}^{0{,}375} + 0{,}04 \ldots}_{\approx 0{,}42} - 0{,}01 \ldots$

$\ln(\frac{3}{2}) \approx 0{,}4$

Teilaufgabe C: In der zweiten Hälfte dieser Aufgabe wollen wir entscheiden, ob $\ln(x)$ auf dem Intervall $(0,1)$ gleichmäßig stetig ist oder nicht. Wie ist *gleichmäßige Stetigkeit* einer Funktion f auf einem Intervall I überhaupt definiert?

$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta > 0 \;\; \forall x_1, x_2 \in I: \;\; |x_1 - x_2| < \delta \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$

Teilaufgabe D: Für jedes noch so kleine $\delta > 0$ betrachten wir die Punkte $x_1 = \frac{\delta}{2}$ und $x_2 = \delta$. Geben Sie eine reelle Zahl $\varepsilon > 0$ an, so dass für diese Werte $|\ln x_2 - \ln x_1| \geq \varepsilon$ gilt.

Die Rechnung ... $|\ln(x_2) - \ln(x_1)| = |\ln(\delta) - \ln(\delta/2)| = |\ln(\delta \cdot \frac{2}{\delta})| = |\ln(2)| = \ln(2) > 0$

zeigt, dass beispielsweise $\varepsilon = \ln(2)$ genommen werden kann. Daher ist $\ln x$ auf $(0,1)$
(bitte ankreuzen) $\quad$ ☐ gleichmäßig stetig $\quad$ ☒ nicht gleichmäßig stetig.

Raum für Nebenrechnungen und sonstige Notizen, die bei der Beurteilung ignoriert werden.