Mathematik 2 für Bauingenieure, Prüfung am 24.6.2014, Winkler

Name, Matrikelnummer (bitte ausfüllen):

Die mündliche Prüfung findet an einem der nachfolgend angegebenen Tage statt. Sollten Sie Ihre Terminpräferenzen noch nicht bekundet haben, können Sie bevorzugte Tage durch Ankreuzen des entsprechenden kleinen Kreises, unmögliche Tage durch Streichen des Datums kennzeichnen. Je weniger Einschränkungen Sie machen, desto leichter können Ihre Wünsche erfüllt werden:
∘ Fr 27.6., ∘ Mo 30.6., ∘ Di 1.7., ∘ Mi 2.7.
Die genaue Termineinteilung wird Ihnen bis spätestens Mittwoch (25.6.) abends über TISS mitgeteilt werden.

Hinweise bevor Sie beginnen:
Die einzelnen Teilfragen haben ungefähr gleiches Gewicht.
Ihre Arbeitszeit beträgt 90 Minuten. Einzelne Teilfragen sind aufwendiger als andere. Bedenken Sie das nötigenfalls bei Ihrer Zeiteinteilung.
Vergessen Sie nicht auf die Rückseite der Angabe.

1. Gegeben seien die drei Vektoren $\mathbf{a} = (1, 2, 3), \mathbf{b} = (2, 3, 4), \mathbf{c} = (3, 5, 7) \in \mathbb{R}^3$ und der von ihnen aufgespannte Unterraum U (= ihre lineare Hülle). Außerdem fassen wir $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ und $\mathbf{c}$ als Spaltenvektoren einer 3×3-Matrix A auf, die (bezüglich der kanonischen Basis) eine lineare Abbildung f darstellt.

   (a) Begründen Sie, warum U die Dimension 2 hat. (Achtung: Für die Dimension d muss sowohl $d \geq 2$ als auch $d \leq 2$ begründet werden.)

   (b) Geben Sie den Rang und den Defekt von f an. Hinweis: (a).

   (c) Geben Sie eine Parameterdarstellung des Kerns von f an.

   (d) Wir ersetzen den Vektor $\mathbf{c}$ durch einen Vektor $\mathbf{c}' = (3, 5, \alpha)$, wo die dritte Komponente variabel ist. Die so aus A entstehende Matrix bezeichnen wir mit A_α. Die Determinante von A_α erweist sich als eine Funktion der Bauart $\det(A_\alpha) = k\alpha + d$. Geben Sie k und d an.

   (e) Für welches α in (d) ist 0 ein Eigenwert von A_α? Hinweis: Die Antwort folgt direkt aus bereits Bekanntem.

2. In dieser Aufgabe sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ differenzierbar.

   (a) Die Ableitung f' ordnet jedem $\mathbf{x} = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ den Wert $f'(\mathbf{x})$ zu, der allerdings keine Zahl ist, sondern eine lineare Abbildung. Für welche Vektorräume V_1 und V_2 ist $f(\mathbf{x}) : V_1 \to V_2$ und durch welche Approximationseigenschaft ist $f'(\mathbf{x})$ definiert?

   (b) Geben Sie die Matrixdarstellung von $f'(x, y)$ an für $f(x, y) = x^2 + y$.

   (c) Wir interessieren uns für Extremwerte von f aus (b) auf der Einheitskreisscheibe $K = \{(x, y) : \ x^2 + y^2 \leq 1\}$. Gibt es solche im Inneren von K? Wenn nein, begründen Sie dies; wenn ja, geben Sie die Extremstellen und -werte an.

   (d) Nimmt die Funktion f aus (b) ein Minimum und ein Maximum auf der Kreislinie $L = \{(x, y) : \ x^2 + y^2 = 1\}$ an? Begründen Sie Ihre Antwort. Hinweis: Für die Antwort ist keine Rechnung nötig, sie folgt aus einem allgemeinen Satz.

   (e) Finden Sie nun alle Extremstellen und -werte von f aus (b) auf der gesamten Kreisscheibe K, sofern solche existieren. (Achtung: Dieser Aufgabenteil dauert etwas länger als die meisten anderen. Sollten Sie in Zeitnot geraten, empfiehlt es sich daher, zuerst andere Aufgaben zu bearbeiten.)

3. Beim Roulette gibt es bekanntlich 37 mögliche Felder (0 bis 36), auf denen die Kugel landen kann. Wir wollen annehmen, dass wir es mit einer gerechten Roulettescheibe zu tun haben, dass also allen Feldern dieselbe Wahrscheinlichkeit zukommt und verschiedene Spielrunden unabhängig voneinander sind. Setzt man auf ein bestimmtes Feld den Einsatz E und landet die Kugel tatsächlich dort, so erhält man $36E$ ausbezahlt (worin der Einsatz enthalten ist). Andernfalls geht der Einsatz ersatzlos verloren. Angenommen, wir haben kein Geld, dürfen fürs Spielen aber Geld ausborgen. Wir nehmen in jeder Runde eine Geldeinheit (also $E = 1$). Die Zufallsvariable X_n beschreibt unser Vermögen nach der n-ten Runde, wobei Schulden als negatives Vermögen verbucht werden. Die Zufallsgröße Y_n beschreibt unser Vermögen nach nur einer Runde, wenn wir jedoch $E = n$ Geldeinheiten einsetzen statt $E = 1$.

   (a) Der Erwartungswert μ von X_1 ist gerundet $-0{,}027$. Geben Sie einen exakten Ausdruck für μ an. (Sie müssen ihn nicht ausrechnen.) Wie errechnet sich daraus der Erwartungswert μ_n von X_n?

   (b) Die Varianz σ^2 von X_1 ist gerundet 34,08. Geben Sie einen exakten Ausdruck für σ^2 an. (Sie müssen ihn nicht ausrechnen.) Wie errechnet sich daraus die Varianz σ_n^2 von X_n?

   (c) Wie errechnen sich Erwartungswert und Varianz von Y_n aus den Werten μ und σ^2 aus (a) bzw. (b)?

   (d) Sei p_n die Wahrscheinlichkeit, dass X_n positiv, q_n die Wahrscheinlichkeit, dass Y_n positiv ist. Gerundet gilt $p_{10} = 0{,}24$ und $q_{10} = 0{,}027$. Geben Sie exakte Ausdrücke für p_{10} und q_{10} an. (Sie müssen sie nicht ausrechnen.)

   (e) Konvergieren die Folgen p_n und q_n aus (d) für $n \to \infty$? Wenn ja, wogegen? Hinweis für p_n: Gesetz der großen Zahlen.

4. Für $R, H > 0$ sei die Funktion $f : [0, H] \to \mathbb{R}$ so gewählt, dass die Menge $K = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 \leq f(z)^2\}$ ein Kegel mit Radius R und Höhe H ist. K stehe auf der Spitze, die sich im Koordinatenursprung befinde, und sei nach oben hin von einer Kreisscheibe begrenzt, die parallel zur xy-Ebene liege und ihren Mittelpunkt in $(0, 0, H)$ habe. In dieser Aufgabe soll u.a. für das Volumen $V = \lambda_3(K) = \int_K d\lambda_3$ eine Formel in R und H abgeleitet werden.

   (a) Wie kann man $f(z)$ für $0 \leq z \leq H$ definieren? (Skizze!)

   (b) V lässt sich als Integral der Form $\int_0^H g(z)\,dz$ darstellen. Mit welchem g?

   (c) K lässt sich mittels einer geeigneten Transformation

   $$\Phi : Q \to \mathbb{R}^3, \quad (r, \alpha, h) \to (x(r, \alpha, h), y(r, \alpha, h), z(r, \alpha, h))$$

   (Kegelkoordinaten) mit $Q = [0, R] \times [0, 2\pi] \times [0, H]$ als Bild $\Phi(Q)$ des Quaders Q darstellen. Geben Sie geeignete Komponentenfunktionen $x, y, z : Q \to \mathbb{R}$ explizit, d.h. durch Formeln in r, α und h an.

   (d) Stellen Sie V mit Hilfe der Transformation Φ aus (c) gemäß der Substitutionsregel als Dreifachintegral dar. (An dieser Stelle müssen Sie die involvierte Determinante noch nicht ausrechnen. Es genügt, korrekt anzuschreiben, um welche Determinante es sich handelt.)

   (e) Berechnen Sie V. Sie dürfen dafür (b) oder (d) verwenden, eine Methode genügt. Eine nur auswendig gewusste Formel ist aber zu wenig. (Sofern Sie die Formel nicht ohnedies auswendig wissen, können Sie die zweite Methode zur Kontrolle verwenden. Bedenken Sie, dass die beiden Methoden unterschiedlich viel Zeit in Anspruch nehmen können.)