Mathematik 2 für Bauingenieure

Prüfung am 10.10.2014
Reinhard Winkler

Name (bitte ausfüllen):

Matrikelnummer (bitte ausfüllen):

Die mündliche Prüfung wird voraussichtlich im Zeitraum vom 15.10. bis 30.10. stattfinden. Die Termineinteilung wird Ihnen rechtzeitig per TISS bekanntgegeben werden. Sie können hier Wünsche angeben, welche Tage/Zeiten für Sie besonders günstig oder ungünstig wären. Je weniger einschränkend Ihre Angaben sind, desto leichter kann Ihrem Wunsch entsprochen werden:

Wichtige Hinweise bevor Sie beginnen:

- Die Prüfung besteht aus vier Aufgaben 1, 2, 3 und 4, untergliedert in jeweils vier Teilaufgaben A, B, C und D. Zu jeder Teilaufgabe wird maximal ein Punkt vergeben. Ab 8 von 16 möglichen Punkten dürfen Sie jedenfalls zur mündlichen Prüfung antreten.
- Die Arbeitszeit beträgt 90 Minuten.
- Zu jeder Teilaufgabe wird der Punkt (oder Teile eines Punktes) ausschließlich für das vergeben, was Sie unmittelbar unterhalb der Angabe dieser Teilaufgabe niedergeschrieben haben (und nicht unterhalb der horizontalen Trennlinie zur nächsten Teilaufgabe).

  In den meisten Fällen sollte der jeweils vorgesehene Platz für die Lösung ausreichen. Es lohnt daher, wenn Sie, bevor Sie mit dem Schreiben beginnen, sich vergewissern, dass Sie Ihre Antwort entsprechend kurz fassen können. Sollten Sie längere Nebenrechnungen oder sonstige schriftliche Überlegungen durchführen wollen, stehen Ihnen dafür die beiden letzten Blätter dieses Heftes zur Verfügung. Was immer sie dort notieren, wird bei der Punkteauswertung ignoriert.
- Wenn Sie sich noch vor der Ausführung der Details einen Überblick darüber verschaffen, was in den einzelnen Aufgaben und ihren Teilen zu tun ist, kann das hilfreich für eine kluge Zeiteinteilung sein.

Nur vom Prüfer auszufüllen:

Punkte für Aufgabe 1: Aufgabe 2: Aufgabe 3: , Aufgabe 4: , Gesamt:

Protokoll zur mündlichen Prüfung, sonstige Bemerkungen und Gesamtnote:

Aufgabe 1: Der Wert der Zufallsgröße X sei die Anzahl der Würfe mit einem gerechten Würfel, die nötig sind, um eine Sechs zu würfeln. X kann also die Werte $1, 2, 3, \ldots$ annehmen.

Für die Berechnung einiger der in der Aufgabe auftretenden Wahrscheinlichkeiten sind die Werte q^n für $q = \frac{5}{6} \approx 0{,}8333$ und einige $n \in \mathbb{N}$ in Dezimaldarstellung nützlich: $q^2 \approx 0{,}6944$, $q^3 \approx 0{,}5787$, $q^4 \approx 0{,}4823$, $q^5 \approx 0{,}4018$, $q^6 \approx 0{,}3349$, $q^7 \approx 0{,}2791$, $q^8 \approx 0{,}2326$, $q^9 \approx 0{,}1938$, $q^{10} \approx 0{,}1615$ etc.

Teilaufgabe A: Geben Sie eine Formel für die Wahrscheinlichkeit $\mathbb{P}(X = n)$ an, d.h. dafür, dass beim n-ten Wurf die erste Sechs auftritt.

Teilaufgabe B: Geben Sie eine Formel für die Wahrscheinlichkeit $\mathbb{P}(X \leq n)$ an, d.h. dafür, dass bis zum n-ten Wurf wenigstens einmal eine Sechs auftritt. Diese Formel soll keine Summe aus n Summanden enthalten, sondern einfacher sein. (Bemerkung: Sie können eine Summationsformel verwenden oder auch mit der Gegenwahrscheinlichkeit arbeiten.)

Teilaufgabe C: Skizzieren Sie die Verteilungsfunktion F_X von X, definiert durch $F_X(x) := \mathbb{P}(X \leq x)$, im Bereich $[0, 7]$, lesen Sie daraus den Median m der Verteilung ab und illustrieren Sie Ihre Vorgangsweise anhand Ihrer Skizze.

Teilaufgabe D: Stellen Sie den Erwartungswert $\mathbb{E}(X)$ als unendliche Summe dar und berechnen Sie diese mit Hilfe der Formel $\sum_{n=1}^{\infty} n x^n = \frac{x}{(1-x)^2}$ (für $|x| < 1$).

Aufgabe 2: Sei $n \in \mathbb{N}$ und $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ ein Vektor, dann ist durch $f_{\mathbf{y}}(\mathbf{x}) := \mathbf{y}\mathbf{x}$ (Skalarprodukt) eine Abbildung $f_{\mathbf{y}} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definiert.

Teilaufgabe A: Ist $f_{\mathbf{y}}$ eine lineare Abbildung? Begründen Sie Ihre Antwort anhand der Definition von Linearität.

Teilaufgabe B: Beschreiben Sie für den Fall $n = 3$ verbal die geometrische Gestalt des Kerns $K_{\mathbf{y}}$ von $f_{\mathbf{y}}$. Unterscheiden Sie dabei die Fälle $\mathbf{y} = 0$ (Nullvektor) und $\mathbf{y} \neq 0$.

Teilaufgabe C: Für Rang r und Defekt d von $f_{\mathbf{y}}$ können bei vorgegebenem n zwei Fälle auftreten. Welche?

Teilaufgabe D: Sei wieder $n = 3$ und diesmal konkret $\mathbf{y} = (1, 1, 1)$. Geben Sie eine Basis B des Kerns $K_{\mathbf{y}}$ von $f_{\mathbf{y}}$ an.

Aufgabe 3: Die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sei stetig differenzierbar. Außerdem betrachten wir die mit Hilfe von f definierte Funktion $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $g(x, y) := (x, y, f(x, y))$.

Teilaufgabe A: Das Bild $g(\mathbb{R}^2)$ von $\mathbb{R}^2$ unter g lässt sich als Fläche deuten, die in jedem Punkt $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ eine Tangentialebene $T_{\mathbf{x}_0}$ hat. $T_{\mathbf{x}_0}$ lässt sich in der Parameterform $T_{\mathbf{x}_0} = \{\mathbf{p} + s\mathbf{x} + t\mathbf{y} : \ s, t \in \mathbb{R}\}$ darstellen. Welche Punkte/Vektoren aus $\mathbb{R}^3$ kann man für $\mathbf{p}, \mathbf{x}$ und $\mathbf{y}$ wählen? Anleitung: Verwenden Sie in der Darstellung von $\mathbf{x}$ und $\mathbf{y}$ geeignete partielle Ableitungen.

Teilaufgabe B: Wie Teilaufgabe A, jedoch speziell für $f(x, y) = e^x \sin y$, $x_0 = 1$ und $y_0 = 0$.

Teilaufgabe C: Das Differential von f an einer Stelle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ ist eine lineare Abbildung $l : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ der Bauart $l(h, k) = a(x, y)h + b(x, y)k$ mit geeigneten Funktionen a und b in den beiden Variablen x und y. Welche Funktionen hat man zu nehmen?

Teilaufgabe D: Berechnen Sie die Funktionen a und b aus Teilaufgabe C für die spezielle Funktion f aus Teilaufgabe B.

Aufgabe 4: Im Zusammenhang mit dem Existenz- und Eindeutigkeitssatz für gewöhnliche Differentialgleichungen der Form $y' = f(x, y)$ (bei vorgegebener Funktion f) mit der Anfangsbedingung $y(x_0) = c$ (bei vorgegebenen Werten x_0 und c) treten Rekursionen für Funktionen y_n auf. In dieser Aufgabe geht es um die Differentialgleichung mit der Rekursion:

$$\text{R:} \quad y_{n+1}(x) = 1 + \int_0^x t y_n(t)\, dt.$$

Teilaufgabe A: Ermitteln Sie für die konstante Funktion $y_0(x) = 1$ aus der Rekursion R die Funktionen $y_1(x)$ und $y_2(x)$.

Teilaufgabe B: Wir setzen wieder $y_0(x) = 1$ (konstante Funktion). Für $n = 0$ (Induktionsanfang) gilt offenbar die Formel $y_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\left(\frac{x^2}{2}\right)^k}{k!}$. Beweisen Sie diese Formel für beliebiges $n \in \mathbb{N}$, indem Sie mit Hilfe der Rekursion R den Induktionsschritt von n auf $n + 1$ durchführen.

Teilaufgabe C: Wie lauten für die Rekursion R die Differentialgleichung und die Anfangsbedingung? Antworten Sie, indem Sie $f(x, y), x_0$ und c von oben angeben.

Teilaufgabe D: Finden Sie einen einfachen analytischen Ausdruck ohne Summensymbol für die Funktion $y(x) := \lim_{n\to\infty} y_n(x)$ mit y_n aus Teilaufgabe B. (Sie können die Probe machen, indem Sie in die Differentialgleichung aus Teilaufgabe C einsetzen.)

Raum für Nebenrechnungen und sonstige Notizen, die bei der Beurteilung ignoriert werden.

Raum für Nebenrechnungen und sonstige Notizen, die bei der Beurteilung ignoriert werden.