Mathematik 2 für Bauingenieure

Prüfung am 1.12.2017
Reinhard Winkler

Name (bitte ausfüllen):

Matrikelnummer (bitte ausfüllen):

Die mündliche Prüfung findet entweder am Nachmittag des 6.12. (Mittwoch) oder am Donnerstag, dem 7.12., statt. Falls innerhalb dieses Rahmens gewisse Zeiten für Sie ungünstig sind, geben Sie diese bitte hier an. Nach Möglichkeit (keine Garantie) werden Ihre Wünsche berücksichtigt. Spätestens im Laufe des Montags (4.12.) wird Ihnen per TISS-Aussendung bekannt gegeben, ob Sie zur mündlichen Prüfung zugelassen sind, sowie wo und wann diese stattfindet.

Ungünstige Tage/Zeiten: ...

Wichtige Hinweise bevor Sie beginnen:

- Die Prüfung besteht aus vier Aufgaben 1, 2, 3, 4, untergliedert in jeweils vier Teilaufgaben A, B, C, D. Zu jeder Teilaufgabe wird maximal ein Punkt vergeben. Ab 8 von 16 möglichen Punkten dürfen Sie jedenfalls zur mündlichen Prüfung antreten.
- Die Arbeitszeit beträgt 90 Minuten.
- Wenn in der Angabe nicht ausdrücklich anders vermerkt, wird zu jeder Teilaufgabe der Punkt (oder Teile eines Punktes) ausschließlich für das vergeben, was Sie unmittelbar neben bzw. unterhalb der Angabe dieser Teilaufgabe niedergeschrieben haben (und nicht unterhalb der horizontalen Trennlinie zur nächsten Teilaufgabe). Drei Punkte ... symbolisieren, dass Sie Ihre Eintragung an dieser Stelle machen bzw. beginnen, ein kleiner Kreis $\circ$, dass Sie Zutreffendes ankreuzen sollen.

  In den meisten Fällen sollte der jeweils vorgesehene Platz für die Lösung der Aufgabe ausreichen. Es lohnt daher, wenn Sie sich, bevor Sie mit dem Schreiben beginnen, vergewissern, dass Sie Ihre Antwort entsprechend kurz fassen können. Sollten Sie längere Nebenrechnungen oder sonstige schriftliche Überlegungen durchführen wollen, stehen Ihnen dafür die beiden letzten Blätter dieses Heftes zur Verfügung. Was immer Sie auf den letzten beiden Blättern notieren, wird bei der Punkteauswertung ignoriert.
- Wenn Sie sich noch vor Ausführung der Details einen Überblick darüber verschaffen, was in den einzelnen Aufgaben und ihren Teilen zu tun ist, kann das hilfreich für eine kluge Zeiteinteilung sein.

Nur vom Prüfer auszufüllen:

Punkte für Aufgabe 1: Aufgabe 2: Aufgabe 3: Aufgabe 4: Summe:

Protokoll zur mündlichen Prüfung, sonstige Bemerkungen:

Gesamtnote:

Aufgabe 1: In dieser Aufgabe geht es um Eigenwerttheorie und um die Transformation quadratischer Matrizen auf Diagonalgestalt. Dabei bezeichne V einen Vektorraum und $f : V \to V$ eine lineare Abbildung.

Teilaufgabe A: Definieren Sie, was man unter einem Eigenvektor $\mathbf{x}$ von f zum Eigenwert λ, unter einem Eigenwert λ von f, und dem Eigenraum E_λ von f versteht.

Ein Vektor $\mathbf{x} \in V$ heißt Eigenvektor von f zum Eigenwert λ, wenn ...

Eine Zahl λ heißt Eigenwert von f, wenn ...

Der Eigenraum E_λ von f besteht aus ...

Teilaufgabe B: Jede $n \times n$ Matrix stellt bezüglich der kanonischen Basis von $V = \mathbb{R}^n$ eine lineare Abbildung $f : V \to V$ dar. Deshalb lassen sich die Begriffe aus Teilaufgabe A von linearen Abbildungen f auch auf quadratische Matrizen A anwenden. Geben Sie eine reelle 2×2-Matrix A an, die keinen reellen Eigenwert hat.

Keinen reellen Eigenwert hat zum Beispiel $A = \ldots$

Teilaufgabe C: Angenommen $V = \mathbb{R}^3$, und es gebe eine (geordnete) Basis B aus Eigenvektoren $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3$ von f zu den Eigenwerten $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$. Geben Sie die Matrixdarstellung A_B von f bezüglich der Basis B an.

$A = \ldots$

Teilaufgabe D: Wie Teilaufgabe C, nur ist die Matrixdarstellung A bezüglich der kanonischen Basis (statt bezüglich B) gesucht. Es genügt dabei, eine reguläre Matrix X und eine Diagonalmatrix D anzugeben, für die $A = XDX^{-1}$ gilt. Außerdem dürfen neben den Eigenwerten $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ auch die Darstellungen

$$\mathbf{b}_1 := \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ x_{31} \end{pmatrix} \quad \mathbf{b}_2 := \begin{pmatrix} x_{12} \\ x_{22} \\ x_{32} \end{pmatrix} \quad \mathbf{b}_3 := \begin{pmatrix} x_{13} \\ x_{23} \\ x_{33} \end{pmatrix}$$

für $i = 1, 2, 3$ bezüglich der kanonischen Basis als bekannt angenommen werden.

$X = \ldots$ $\qquad\qquad$ $D = \ldots$

Aufgabe 2: In dieser Aufgabe geht es um Differentialgleichungen, für die die Funktion $f(x) := xe^x$ eine Lösung ist.

Teilaufgabe A: Berechnen Sie die ersten beiden Ableitungen f', f'' von f und geben Sie eine Formel für die n-te Ableitung $f^{(n)}$.

$f'(x) = \dots$

$f''(x) = \dots$

$f^{(n)}(x) = \dots$

Teilaufgabe B: Gibt es eine homogene lineare Differentialgleichung erster Ordnung mit konstanten Koeffizienten, für die f eine Lösung ist? Geben Sie im positiven Fall ein Beispiel, im negativen eine Begründung an.

Raum für eine eventuelle Nebenrechnung:

○ Ja, so eine Differentialgleichung gibt es, zum Beispiel …

○ Nein, so eine Differentialgleichung gibt es nicht, denn: …

Teilaufgabe C: Gibt es eine homogene lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten, für die f eine Lösung ist? Geben Sie ein positiven Fall ein Beispiel, im negativen eine Begründung an.

Raum für eine eventuelle Nebenrechnung:

○ Ja, so eine Differentialgleichung gibt es, zum Beispiel …

○ Nein, so eine Differentialgleichung gibt es nicht, denn: …

Teilaufgabe D: Geben Sie irgendeine Differentialgleichung an, die f als Lösung hat und für die Sie auch die Menge L *aller* Lösungen angeben können.

Die Differentialgleichung …

hat f als Lösung, und die Lösungsmenge L besteht aus allen Funktionen $y(x)$ der Gestalt

$y(x) = \dots$

mit …

Aufgabe 3: Gegeben sei die Teilmenge

$$M := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ 2 \leq x^2 + y^2 \leq 3, \ x > 0, \ 0 \leq \frac{y}{x} \leq 1\}$$

der Ebene $\mathbb{R}^2$. Wir werden uns mit zwei Berechnungen der Fläche $F = \lambda_2(M)$ (zweidimensionales Lebesguemaß) von M befassen. (Die Kreiszahl π dürfen Sie durchwegs verwenden, ohne sie numerisch auszuwerten.)

Teilaufgabe A: Skizzieren Sie die Menge M und berechnen Sie die Fläche $F = \lambda_2(M)$ mit Hilfe der Flächenformel für einer Kreisscheibe mit Radius r und elementargeometrischen Überlegungen.

Teilaufgabe B: Wir wollen $M \subseteq \mathbb{R}^2$ nun als Bild $M = T(Q)$ eines achsenparallelen rechteckigen Bereichs $Q = [r_0, r_1] \times [\alpha_0, \alpha_1] \subseteq \mathbb{R}^2$ unter einer bijektiven und stetig differenzierbaren Transformation $T : Q \to M$ darstellen. Diese Darstellung wird in den Teilaufgaben C und D eine Berechnung der Fläche von M mit Hilfe der mehrdimensionalen Integralrechnung ermöglichen. Geben Sie T durch seine Komponentenfunktionen sowie Q durch die Randpunkte $r_0, r_1, \alpha_0, \alpha_1$ explizit an.

$T : Q \to M, \ (r, \alpha) \mapsto \begin{pmatrix} x(r,\alpha) \\ y(r,\alpha) \end{pmatrix}$ mit Komponentenfunktionen

$x(r,\alpha) = \dots$ und $y(r,\alpha) = \dots$

$r_0 = \dots$ $r_1 = \dots$ $\alpha_0 = \dots$ $\alpha_1 = \dots$

Teilaufgabe C: Geben Sie den Integranden $g(r,\alpha)$ in der nachfolgenden Integralformel (Doppelintegral) für die Fläche F von M als Funktion von r und α an. Die Auswertung des Integrals wird hier noch nicht verlangt, erst in Teilaufgabe D. Hinweis: In $g(r,\alpha)$ spielt u.a. die Ableitung der Funktion T aus Teilaufgabe B eine Rolle.

$$F = \int_Q g(r,\alpha)\, d\lambda_2 = \int_{\alpha_0}^{\alpha_1} \int_{r_0}^{r_1} g(r,\alpha)\, dr\, d\alpha$$

mit $g(r,\alpha) = \dots$

Teilaufgabe D: Berechnen Sie das Integral aus Teilaufgabe C mit den Werten $r_0, r_1, \alpha_0, \alpha_1$ aus Teilaufgabe B. (Hinweis: Kontrollieren Sie, ob Ihr Ergebnis mit dem aus Teilaufgabe A übereinstimmt. In beiden Teilaufgaben A und D soll Ihr Rechengang nachvollziehbar sein.)

$F = \int_{\alpha_0}^{\alpha_1} \int_{r_0}^{r_1} g(r,\alpha)\, dr\, d\alpha = \dots$

Aufgabe 4: In dieser Aufgabe geht es um wahrscheinlichkeitstheoretische Fragestellungen, die sich auf die folgende Situation beziehen.

In eine Herde von 990 Schafen haben sich auch 10 Wölfe im Schafspelz eingeschlichen. Ihre Verkleidung ist so gut, dass man sie von außen nicht von den echten Schafen unterscheiden kann. Angenommen alle 1000 Tiere der Herde sind auf zufällige Weise nummeriert. (Dabei bedeutet „zufällig“, dass jede der 1000! möglichen Nummerierungen dieselbe Wahrscheinlichkeit haben soll.) Sei X_n jene Zufallsvariable, die den Wert 1 annimmt, wenn das Tier mit der Nummer n ein Wolf ist, sonst 0. Für $N = 1, \ldots, 1000$ gibt die Summe $S_N := \sum_{n=1}^{N} X_n$ also an, wieviele Wölfe sich unter den Tieren mit den Nummern 1 bis N befinden.

Teilaufgabe A: Geben Sie die folgenden (teilweise bedingten) Wahrscheinlichkeiten möglichst als gekürzte Brüche an:

$\mathbb{P}(X_1 = 1) = \ldots$

$\mathbb{P}(X_2 = 1 | X_1 = 1) = \ldots$

$\mathbb{P}(X_2 = 1 | X_1 = 0) = \ldots$

Teilaufgabe B: Angenommen, wir wählen n Tiere aus der Herde aus. Sei w_n die Wahrscheinlichkeit, dass sich darunter kein einziger Wolf befindet. Eine Formel für w_n ergibt sich als Produkt von n Brüchen aus vorwiegend dreistelligen Zahlen, z.B. $w_1 = \frac{990}{1000}$, $w_2 = \frac{990}{1000} \cdot \frac{989}{999}$ etc. Mit Hilfe der Notation für Faktorielle lässt sich kurz schreiben: $w_n = \frac{a! \cdot b!}{c! \cdot d!}$ mit geeigneten $a, b, c, d \in \mathbb{N}$. Welche Werte muss man bei $n = 100$ für a, b, c, d nehmen?

$a = \ldots$ $\qquad$ $b = \ldots$ $\qquad$ $c = \ldots$ $\qquad$ $d = \ldots$

Teilaufgabe C: Die Summe $S_N := \sum_{n=1}^{N} X_n$ gibt an, wie viele Wölfe sich unter den Tieren mit den Nummern 1 bis N befinden. Geben Sie den Erwartungswert von X_n (dieser ist für alle n gleich) und von S_N in Abhängigkeit von N an:

$\mathbb{E}(X_n) = \ldots$ $\qquad$ $\mathbb{E}(S_N) = \ldots$

Teilaufgabe D: Wir schließen an die Überlegungen aus Teilaufgabe C an. Wir schreiben $p_n := \mathbb{P}(S_{100} = n)$ für die Wahrscheinlichkeit, dass sich unter den Tieren mit den Nummern 1 bis 100 genau n Wölfe befinden. (Klarerweise ist $p_n = 0$ für $n > 10$.) Da unter sämtlichen Tieren der Herde die Wölfe einen Anteil von 1% haben, rechnen wir damit, dass unter den Tieren mit den Nummern 1 bis 100 im Durchschnitt ein Wolf zu erwarten ist. Wir stellen uns nun die Frage, ob daraus folgt, dass die Wahrscheinlichkeiten p_0, dass gar kein Wolf darunter ist, und die Wahrscheinlichkeit $p_+ := \sum_{n=2}^{100} p_n$, dass mehr als ein Wolf darunter ist, gleich groß sind. Die Antwort lässt sich aus der Rechnung

$$1 = \mathbb{E}(S_{100}) = \sum_{n=0}^{10} np_n = 0p_0 + 1p_1 + \sum_{n=2}^{10} np_n > p_1 + \sum_{n=2}^{10} 2p_n = \sum_{n=0}^{10} p_n + \sum_{n=2}^{10} p_n - p_0 = 1 + p_+ - p_0$$

ablesen. Welche der folgenden drei Aussagen trifft also zu?

○ $p_0 < p_+$ $\qquad$ ○ $p_0 = p_+$ $\qquad$ ○ $p_0 > p_+$

Raum für Nebenrechnungen und sonstige Notizen, die bei der Beurteilung ignoriert werden.

Raum für Nebenrechnungen und sonstige Notizen, die bei der Beurteilung ignoriert werden.