Mathematik 2 für Bauingenieure

Prüfung am 19.1.2018
Reinhard Winkler

Name (bitte ausfüllen):

Matrikelnummer (bitte ausfüllen):

Die mündliche Prüfung wird in der kommenden Woche stattfinden. Zur Vereinbarung eines Termins melden Sie sich bitte nach der schriftlichen Prüfung per e-mail bei mir:

reinhard.winkler@tuwien.ac.at

Wichtige Hinweise bevor Sie beginnen:

- Die Prüfung besteht aus vier Aufgaben 1, 2, 3, 4, untergliedert in jeweils vier Teilaufgaben A, B, C, D. Zu jeder Teilaufgabe wird maximal ein Punkt vergeben. Ab 8 von 16 möglichen Punkten dürfen Sie jedenfalls zur mündlichen Prüfung antreten.
- Die Arbeitszeit beträgt 90 Minuten.
- Wenn in der Angabe nicht ausdrücklich anders vermerkt, wird zu jeder Teilaufgabe der Punkt (oder Teile eines Punktes) ausschließlich für das vergeben, was Sie unmittelbar neben bzw. unterhalb der Angabe dieser Teilaufgabe niedergeschrieben haben (und nicht unterhalb der horizontalen Trennlinie zur nächsten Teilaufgabe). Drei Punkte ... symbolisieren, dass Sie Ihre Eintragung an dieser Stelle machen bzw. beginnen, ein kleiner Kreis ◦, dass Sie Zutreffendes ankreuzen sollen.

  In den meisten Fällen sollte der jeweils vorgesehene Platz für die Lösung der Aufgabe ausreichen. Es lohnt daher, wenn Sie sich, bevor Sie mit dem Schreiben beginnen, vergewissern, dass Sie Ihre Antwort entsprechend kurz fassen können. Sollten Sie längere Nebenrechnungen oder sonstige schriftliche Überlegungen durchführen wollen, stehen Ihnen dafür die beiden letzten Blätter dieses Heftes zur Verfügung. Was immer Sie auf den letzten beiden Blättern notieren, wird bei der Punkteauswertung ignoriert.
- Wenn Sie sich noch vor Ausführung der Details einen Überblick darüber verschaffen, was in den einzelnen Aufgaben und ihren Teilen zu tun ist, kann das hilfreich für eine kluge Zeiteinteilung sein.

Nur vom Prüfer auszufüllen:

Punkte für Aufgabe 1: Aufgabe 2: Aufgabe 3: Aufgabe 4: Summe:

Protokoll zur mündlichen Prüfung, sonstige Bemerkungen:

Gesamtnote:

Aufgabe 1: In dieser Aufgabe geht es um den Zusammenhang zwischen Unterräumen von Vektorräumen, linearen Abbildungen und linearen Gleichungssystemen. Stets sei $f : V_1 \to V_2$ eine Abbildung zwischen den Vektorräumen V_1 und V_2.

Teilaufgabe A: Welche Bedingungen muss f definitionsgemäß erfüllen, damit man von einer linearen Abbildung spricht?

Teilaufgabe B: Ein lineares Gleichungssystem in den Variablen $x_1, \ldots, x_m$ besteht aus mehreren Gleichungen (hier n Stück) der Form $a_{i,1}x_1 + \ldots + a_{i,m}x_m = b_i$, $i = 1, \ldots, n$, mit sogenannten Koeffizienten $a_{i,j}$. Die Lösungsmenge L eines solchen Gleichungssystems lässt sich als die Menge aller Vektoren $\mathbf{x}$ eines Vektorraumes V_1 auffassen, die durch eine lineare Abbildung f auf einen bestimmten Vektor $\mathbf{y}$ aus einem Vektorraum V_2 abgebildet werden, die also $f(\mathbf{x}) = \mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_n)$ erfüllen. Wie sind V_1, V_2, $y_1, \ldots, y_n$ zu wählen?

$V_1 = \ldots$ $\qquad$ $V_2 = \ldots$ $\qquad$ $y_i = \ldots$

Teilaufgabe C: Welche Bedingungen muss eine Teilmenge U eines Vektorraums V definitionsgemäß erfüllen, damit man von einem Unterraum spricht?

Teilaufgabe D: Sei $\mathbf{x}_0$ eine Lösung des Gleichungssystem aus Teilaufgabe B. Dann lässt sich L schreiben als $L = \mathbf{x}_0 + \ker f$, wobei $\ker f = \{\mathbf{x} \in V_1 : \; f(\mathbf{x}) = \mathbf{o}\}$. Begründen Sie mit Hilfe der bisherigen Teilaufgaben, warum $\ker f$ ein Unterraum von V_1 ist, indem Sie überprüfen, dass $\ker f$ die Eigenschaften der Definition aus Teilaufgabe C hat.

Aufgabe 2: Wir beschäftigen uns mit jener Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, die der Polardarstellung zugrunde liegt, also:

$$f : (r, \varphi) \mapsto \begin{pmatrix} x(r,\alpha) \\ y(r,\alpha) \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} r\cos(\varphi) \\ r\sin(\varphi) \end{pmatrix}.$$

Teilaufgabe A: Ist $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ injektiv, surjektiv, bijektiv?

○ f ist injektiv. ○ f ist nicht injektiv.

Begründung: …

○ f ist surjektiv. ○ f ist nicht surjektiv.

Begründung: …

○ f ist bijektiv. ○ f ist nicht bijektiv.

Begründung: …

Teilaufgabe B: Angenommen, $\mathbf{x}_0 = (r_0, \varphi_0)$ mit $r_0 \neq 0$ erfüllt $f(\mathbf{x}_0) = \mathbf{y}_0$ für ein bestimmtes $\mathbf{y}_0 \in \mathbb{R}^2$. Beschreiben Sie die Menge $L \subseteq \mathbb{R}^2$ *aller* $\mathbf{x} = (r, \varphi) \in \mathbb{R}^2$ mit $f(\mathbf{x}) = \mathbf{y}_0$. (Achtung: Der Parameter r kann auch negativ sein!)

$L = \ldots$

Teilaufgabe C: Für einen Punkt $\mathbf{x}_0 = (r_0, \varphi_0) \in \mathbb{R}^2$ und (kleine) $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$ sei $Q = Q(r_0, \varphi_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2) := [r_0, r_0 + \varepsilon_1] \times [\varphi_0, \varphi_0 + \varepsilon_2]$. Skizzieren Sie in zwei Koordinatensystemen (eines mit zwei Achsen für r und φ, das andere mit Achsen für x und y), wie Q durch f auf $f(Q)$ abgebildet wird. Wählen Sie $r_0 = 2$, $\varphi_0 = \frac{\pi}{4}$, $\varepsilon_1 = \frac{1}{2}$ und $\varepsilon_2 = \frac{\pi}{8}$.

Teilaufgabe D: Es gibt eine Funktion $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, die angibt, wie stark f Flächen verzerrt. Mit den Notationen aus Teilaufgabe C lässt sich das so präzisieren:

$$\lambda_2\Big(f(Q(r,\varphi,\varepsilon_1,\varepsilon_2))\Big) = \varepsilon_1 \cdot \varepsilon_2 \cdot g(r,\varphi) \cdot \Big(\lambda_2(Q(r,\varphi,\varepsilon_1,\varepsilon_2)) + \Delta(r,\varphi,\varepsilon_1,\varepsilon_2)\Big)$$

mit $\lim_{(\varepsilon_1,\varepsilon_2)\to(0,0)} \Delta(r,\varphi,\varepsilon_1,\varepsilon_2) = 0$. Dabei steht λ_2 für das zweidimensionale Lebesguemaß (d.h. für das übliche Flächenmaß). Berechnen Sie $g(r,\varphi)$.

$g(r,\varphi) = \ldots$

Aufgabe 3: In dieser Aufgabe geht es um Kurvenintegrale und ihre klassische physikalische Interpretation im $\mathbb{R}^3$. Und zwar seien eine Kurve $\mathbf{x}$ und ein Vektorfeld $\mathbf{v}$ gegeben durch die Parametrisierungen

$$\mathbf{x} : [a,b] \to \mathbb{R}^3, \mathbf{x}(t) := \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{v} : \mathbb{R}^3 \supseteq D \to \mathbb{R}^3, \quad \mathbf{v}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} u(x,y,z) \\ v(x,y,z) \\ w(x,y,z) \end{pmatrix}.$$

Teilaufgabe A: Angenommen $\mathbf{x}(t)$ beschreibt den Ort eines Teilchens zum Zeitpunkt t und hat eine Ableitung $\mathbf{x}'$. Welche physikalische Interpretation hat die Länge des Vektors $\mathbf{x}'(t)$?

$\mathbf{x}'(t) = \ldots$

Teilaufgabe B: Angenommen, das Vektorfeld $\mathbf{v}$ beschreibt ein konstantes Kraftfeld und $\mathbf{x}$ ist (inhomogen) linear, d.h. von der Form $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_0 + t\mathbf{a}$ mit gewissen Vektoren $\mathbf{x}_0, \mathbf{a} \in \mathbb{R}^3$. Welche Interpretation hat dann das Skalarprodukt $(\mathbf{x}(t_1) - \mathbf{x}(t_0)) \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}(t))$ für $a \leq t_1 \leq t_2 \leq b, t \in \mathbb{R}$?

Das Skalarprodukt $(\mathbf{x}(t_1) - \mathbf{x}(t_0)) \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}(t))$ entspricht ...

Teilaufgabe C: Angenommen das Vektorfeld $\mathbf{v}$ ist stetig und $\mathbf{x}$ sogar stetig differenzierbar. Die Ableitung $\mathbf{x}'$ sei nicht bekannt, es sei aber möglich, $\mathbf{x}(t)$ zu endlich vielen Zeitpunkten t zu ermitteln, ebenso $\mathbf{v}(\mathbf{x})$ an endlich vielen Stellen $\mathbf{x}$. Welche endlichen Summen kann man verwenden, um sinnvolle Näherungswerte für das Kurvenintegral $\int_C \mathbf{v}\, d\mathbf{x}$ zu erhalten, wenn C eine Kurzschreibweise für die durch $\mathbf{x}$ parametrisierte Kurve bezeichnet?

Teilaufgabe D: Weiterhin sei $\mathbf{v}$ auf ganz $\mathbb{R}^3$ definiert, darüber hinaus sogar stetig differenzierbar. Geben Sie eine hinreichende Bedingung dafür an, dass für alle stetig differenzierbaren Kurven von $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^3$ nach $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$ (in bisheriger Notation also mit $\mathbf{a} = \mathbf{x}(a)$ und $\mathbf{b} = \mathbf{x}(b)$) der Wert des Kurvenintegrals $\int_a^b \mathbf{x}'(t)\mathbf{v}(\mathbf{x}(t))\, dt$ nur von $\mathbf{a}$ und $\mathbf{b}$ abhängt, nicht aber vom gesamten Verlauf der Kurve von $\mathbf{a}$ nach $\mathbf{b}$?

Aufgabe 4: In dieser Aufgabe geht es um wahrscheinlichkeitstheoretische Fragestellungen, vor allem die Normalverteilung betreffend.

Teilaufgabe A: Angenommen $\mathbb{P}$ ist eine Wahrscheinlichkeitsverteilung auf $\mathbb{R}$. Bekanntlich nennt man $\rho : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Dichte für $\mathbb{P}$, wenn für alle $a < b \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\mathbb{P}([a,b]) = \int_a^b \rho(x)\, dx$$

Angenommen, nur die Funktion ρ ist gegeben. Welche Bedingungen an ρ garantieren, dass es eine Wahrscheinlichkeitsverteilung $\mathbb{P}$ gibt, für die ρ Dichte ist?

Teilaufgabe B: Durch welche Dichtefunktion ρ ist die Standardnormalverteilung auf $\mathbb{R}$ definiert?

$\rho(x) = \ldots$

Teilaufgabe C: Wie Teilaufgabe B, nur statt der Standardnormalverteilung die Normalverteilung mit beliebig vorgegebenem Mittelwert $\mu \in \mathbb{R}$ und beliebiger Varianz $\sigma^2 > 0$.

$\rho(x) = \ldots$

Teilaufgabe D: Formulieren Sie einen Satz, aus dem die überragende Bedeutung der Normalverteilung für die Stochastik hervorgeht. (Gefragt ist die *Formulierung*, nicht nur der Name des Satzes.)

Raum für Nebenrechnungen und sonstige Notizen, die bei der Beurteilung ignoriert werden.

Raum für Nebenrechnungen und sonstige Notizen, die bei der Beurteilung ignoriert werden.