Mathematik 2 für Bauingenieure

Prüfung am 18.6.2019
Reinhard Winkler

Name (bitte ausfüllen):

Matrikelnummer (bitte ausfüllen):

Die mündliche Prüfung wird in der letzten Juniwoche von Mo (24.) bis Fr (28.) stattfinden. Mit vielen von Ihnen wurde bereits ein Halbtag fixiert. Alle anderen haben die Möglichkeit, ungünstige Halbtage anzugeben. (Je weniger Sie angeben, desto leichter ist Ihr Wunsch zu erfüllen.) Verwenden Sie die Abkürzungen Mo, Di, Mi, Do, Fr und Vm, Nm.

○ Ein Halbtag wurde bereits fixiert, nämlich ...

○ Noch wurde kein Halbtag fixiert. UNGÜNSTIG sind für mich ...

Wichtige Hinweise bevor Sie beginnen:

- Die Prüfung besteht aus vier Aufgaben 1, 2, 3, 4, untergliedert in jeweils vier Teilaufgaben A, B, C, D. Zu jeder Teilaufgabe wird maximal ein Punkt vergeben. Ab 8 von 16 möglichen Punkten dürfen Sie jedenfalls zur mündlichen Prüfung antreten.
- Die Arbeitszeit beträgt 90 Minuten.
- Wenn in der Angabe nicht ausdrücklich anders vermerkt, wird zu jeder Teilaufgabe der Punkt (oder Teile eines Punktes) ausschließlich für das vergeben, was Sie unmittelbar neben bzw. unterhalb der Angabe dieser Teilaufgabe niedergeschrieben haben (und nicht unterhalb der horizontalen Trennlinie zur nächsten Teilaufgabe). Drei Punkte ... symbolisieren, dass Sie Ihre Eintragung an dieser Stelle machen bzw. beginnen, ein kleiner Kreis ○, dass Sie Zutreffendes ankreuzen sollen.

  In den meisten Fällen sollte der jeweils vorgesehene Platz für die Lösung der Aufgabe ausreichen. Es lohnt daher, wenn Sie sich, bevor Sie mit dem Schreiben beginnen, vergewissern, dass Sie Ihre Antwort entsprechend kurz fassen können. Sollten Sie längere Nebenrechnungen oder sonstige schriftliche Überlegungen durchführen wollen, stehen Ihnen dafür die beiden letzten Blätter dieses Heftes zur Verfügung. Was immer Sie auf den letzten beiden Blättern notieren, wird bei der Punkteauswertung ignoriert.
- Wenn Sie sich noch vor Ausführung der Details einen Überblick darüber verschaffen, was in den einzelnen Aufgaben und ihren Teilen zu tun ist, kann das hilfreich für eine kluge Zeiteinteilung sein.

Nur vom Prüfer auszufüllen:

Punkte für Aufgabe 1: Aufgabe 2: Aufgabe 3: Aufgabe 4: Summe:

Protokoll zur mündlichen Prüfung, sonstige Bemerkungen:

Gesamtnote:

Aufgabe 1: Diese Aufgabe ist der Linearen Algebra zuzuordnen. Gegeben sind die Vektoren

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{c} = \mathbf{c}(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ x \end{pmatrix}$$

mit zunächst nicht näher bestimmtem $x \in \mathbb{R}$.

Teilaufgabe A: Finden Sie reelle Zahlen k und d derart, dass für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\det(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}(x)) = kx + d$$

Die Nebenrechnung . $\det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}(x)) = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & x \end{vmatrix} =$

$= 1 \cdot 4 \cdot x + (-1) \cdot 1 \cdot 0 + 1 \cdot (-2) \cdot 1 - 0 \cdot 4 \cdot 1 - 1 \cdot 1 \cdot 1 - x \cdot (-2) \cdot (-1) = 4x - 2 - 1 - 2x = 2x - 3$

zeigt: $k = ..2..$ und $d = ..-3..$

Teilaufgabe B: Bestimmen Sie x so, dass $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ und $\mathbf{c}(x)$ linear abhängig sind.

Die Nebenrechnung ... $\det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}(x)) \underset{\Uparrow \atop A}{=} 2x - 3 = 0 \iff x = \frac{3}{2}$

zeigt, dass $x = .\frac{3}{2}..$ die geforderte Eigenschaft hat.

Teilaufgabe C: Gibt es ein $x \in \mathbb{R}$ so, dass $\mathbf{c}(x)$ orthogonal auf $\mathbf{a}$ steht?

Nebenrechnung: ...... $\vec{a} \cdot \vec{c}(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ x \end{pmatrix} = 1 - 2 = -1 \neq 0$

○ Ja, so ein x gibt es, nämlich $x = ...$

X Nein, so ein x gibt es nicht.

Teilaufgabe D: Gibt es ein $x \in \mathbb{R}$ so, dass $\mathbf{c}(x)$ orthogonal auf $\mathbf{b}$ steht?

Nebenrechnung: ...... $\vec{b} \cdot \vec{c}(x) = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ x \end{pmatrix} = -1 + 4 + x = 3 + x = 0 \iff x = -3$

X Ja, so ein x gibt es, nämlich $x = ..-3..$

○ Nein, so ein x gibt es nicht.

Aufgabe 2: Gegeben ist die Differentialgleichung $y' = \sin y$.

Teilaufgabe A: Handelt es sich dabei um eine explizite Differentialgleichung? Woran erkennen Sie das?

Die Differentialgleichung ist

X explizit, ○ nicht explizit,

weil ... auf der linken Seite nur die Ableitung y' steht, während rechts keine Ableitung(en) von y vorkommen; formal: weil die Differentialgleichung von der Form $y'=f(y,x)$ mit $f(y,x):=\sin y$ ist.

Teilaufgabe B: Handelt es sich dabei um eine lineare Differentialgleichung? Woran erkennen Sie das?

Die Differentialgleichung ist

○ linear, X nicht linear,

weil ... sin (siehe A) keine lineare Funktion in y ist (auch nicht inhomogen linear)

Teilaufgabe C: Handelt es sich dabei um eine autonome Differentialgleichung? Woran erkennen Sie das?

Die Differentialgleichung ist

X autonom, ○ nicht autonom,

weil ... sie explizit ist (siehe A) und rechts keine unabhängige Variable (z.B. x oder t) vorkommt.

Teilaufgabe D: Eine Lösung der Differentialgleichung ist offenbar die Nullfunktion. Gibt es auch zu jeder beliebig vorgegebenen Anfangsbedingung $y(0) = y_0 \in \mathbb{R}$ eine Lösung? Wenn ja, ist diese Lösung eindeutig? Begründen Sie Ihre Antwort.

X Ja, es gibt zu jedem $y_0 \in \mathbb{R}$ eine Lösung. Diese ist sogar eindeutig.

○ Ja, es gibt zu jedem $y_0 \in \mathbb{R}$ eine Lösung. Diese ist aber nicht für alle y_0 eindeutig.

○ Nein, es gibt nicht zu jedem $y_0 \in \mathbb{R}$ eine Lösung.

Begründung: ... $\sin(y)$ ist Lipschitz-stetig in y, also ist der Existenz- und Eindeutigkeitssatz anwendbar.

Aufgabe 3: Die „nördliche Hemisphäre" H der Einheitskugel besteht aus allen Punkten $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ mit $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ und $z \geq 0$. In dieser Aufgabe geht es um die Parametrisierung von H im Lichte der Differential- und Integralrechnung.

Teilaufgabe A: Geben Sie einen geeigneten rechteckigen und abgeschlossenen Definitionsbereich $D \subseteq \mathbb{R}^2$ und Komponentenfunktionen $x : (\alpha, \beta) \mapsto x(\alpha, \beta)$, $y : (\alpha, \beta) \mapsto y(\alpha, \beta)$ und $z : (\alpha, \beta) \mapsto z(\alpha, \beta)$ an, so dass die Abbildung

$$\Phi : D \to H, \quad (\alpha, \beta) \mapsto \begin{pmatrix} x(\alpha, \beta) \\ y(\alpha, \beta) \\ z(\alpha, \beta) \end{pmatrix}$$

surjektiv und im Inneren von D injektiv ist.

$D := [0, 2\pi] \times [0, \frac{\pi}{2}]$

$x(\alpha, \beta) := \cos\alpha \cdot \cos\beta$ $\quad y(\alpha, \beta) := \sin\alpha \cdot \cos\beta$ $\quad z(\alpha, \beta) := \sin\beta$

Teilaufgabe B: Berechnen Sie die Funktionalmatrix M von Φ an einem beliebigen Punkt $(\alpha, \beta) \in D$.

$$M = \Phi'_{(\alpha,\beta)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial \alpha} & \frac{\partial x}{\partial \beta} \\ \frac{\partial y}{\partial \alpha} & \frac{\partial y}{\partial \beta} \\ \frac{\partial z}{\partial \alpha} & \frac{\partial z}{\partial \beta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin\alpha \cdot \cos\beta & -\cos\alpha \sin\beta \\ \cos\alpha \cdot \cos\beta & -\sin\alpha \sin\beta \\ 0 & \cos\beta \end{pmatrix}$$

Teilaufgabe C: Bezeichne $\mathbf{a}$ und $\mathbf{b}$ die Spaltenvektoren in M. Berechnen Sie das Vektorprodukt $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ in möglichst einfacher Darstellung.

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{pmatrix} \cos\alpha \cdot \cos^2\beta \\ \sin\alpha \cdot \cos^2\beta \\ \sin^2\alpha \cdot \cos\beta \cdot \sin\beta + \cos^2\alpha \cdot \cos\beta \cdot \sin\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha \cdot \cos^2\beta \\ \sin\alpha \cdot \cos^2\beta \\ \cos\beta \cdot \sin\beta \end{pmatrix}$$

Teilaufgabe D: Geben Sie eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ in möglichst einfacher Darstellung und Integrationsgrenzen a, b, c, d an, so dass das Integral

$$\int_a^b \int_c^d f(\alpha, \beta) \, d\alpha \, d\beta$$

die Oberfläche von H darstellt. (Achten Sie auf die richtige Integrationsreihenfolge!)

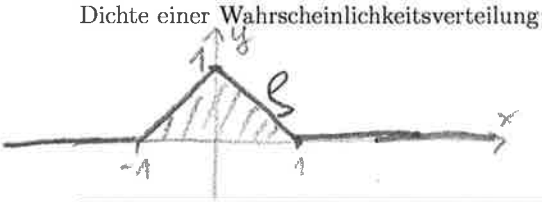
$\cos\beta \geq 1$ für $\beta \in [0, \frac{\pi}{2}]$

$a = 0$ $\quad b = \frac{\pi}{2}$ $\quad c = 0$ $\quad d = 2\pi$

$$f(\alpha, \beta) = \|\bar{a} \times \bar{b}\| = \sqrt{\underbrace{\underbrace{\cos^2\alpha \cdot \cos^4\beta + \sin^2\alpha \cdot \cos^4\beta}_{=\cos^4\beta} + \cos^2\beta \cdot \sin^2\beta}_{= \cos^2\beta(\cos^2\beta + \sin^2\beta) = \cos^2\beta}} = \cos\beta$$

Aufgabe 4: In dieser Aufgabe geht es um Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitstheorie. Gegeben ist die Dichtefunktion ρ einer Wahrscheinlichkeitsverteilung $\mathbb{W}$, definiert durch $\rho(x) := 1 - |x|$ für $|x| \leq 1$ und $\rho(x) = 0$ für $|x| > 1$.

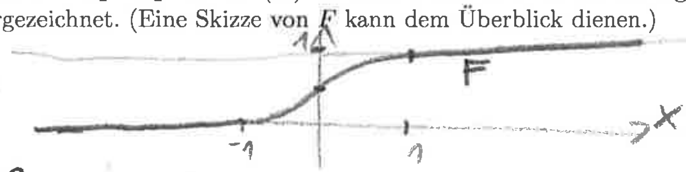
Teilaufgabe A: Skizzieren Sie ρ und begründen Sie, warum es sich dabei tatsächlich um die Dichte einer Wahrscheinlichkeitsverteilung $\mathbb{W}$ auf $\mathbb{R}$ ist.



$$\left.\begin{array}{l} \int_{\mathbb{R}} \rho(x)\,dx = 1 \\ \rho \geq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \rho \text{ ist W-Dichte}$$

Teilaufgabe B: Berechnen Sie $F(x)$ für die Verteilungsfunktion F von $\mathbb{W}$. Betrachten Sie dabei jeden der vier Fälle (i) $x \leq -1$, (ii) $-1 \leq x \leq 0$, (iii) $0 \leq x \leq 1$ und (iv) $x \geq 1$ einzeln. Berechnen Sie im Zuge dieser Aufgabe auch Stammfunktionen F_1 und F_2 von ρ auf den (ii) bzw. (iii) entsprechenden Intervallen. Dabei gilt es, die richtigen Integrationskonstanten c_1 und c_2 mit $F = F_1 + c_1$ im Fall (ii) und $F = F_2 + c_2$ im Fall (iii) zu finden. Als Hilfe ist die Abfolge der Lösungsschritte wie folgt vorgezeichnet. (Eine Skizze von F kann dem Überblick dienen.)

Skizze von F (optional):



(i) Für $x \leq -1$ gilt $F(x) = 0$

(ii) Für $-1 \leq x \leq 0$ ist zu berechnen: $F_1(x) = \int 1+x\,dx = x + \frac{x^2}{2} + c_1$

Wegen $F(-1) = 0$ folgt daraus $c_1 = \frac{1}{2}$. Für $-1 \leq x \leq 0$ gilt daher $F(x) = \frac{x^2}{2} + x + \frac{1}{2}$

(iii) Für $0 \leq x \leq 1$ ist zu berechnen: $F_2(x) = \int 1-x\,dx = x - \frac{x^2}{2} + c_2$

Wegen $F(0) = \frac{1}{2}$ folgt daraus $c_2 = \frac{1}{2}$ Für $0 \leq x \leq 1$ gilt daher $F(x) = -\frac{x^2}{2} + x + \frac{1}{2}$

(iv) Für $x \geq 1$ gilt $F(x) = 1$

Teilaufgabe C: Geben Sie den Erwartungswert $\mathbb{E}(\mathbb{W})$ von $\mathbb{W}$ an. (Hinweis: Wegen $\rho(-x) = \rho(x)$ lässt sich diese Aufgabe auch ohne Rechnung lösen.)

$\mathbb{E}(\mathbb{W}) = 0$

Teilaufgabe D: Berechnen Sie die Varianz $\mathbb{V}(\mathbb{W})$ von $\mathbb{W}$.

$$\mathbb{V}(\mathbb{W}) = \int_{-1}^{1} (x - \mathbb{E}(\mathbb{W}))^2 \rho(x)\,dx = \int_{-1}^{0} x^2(1+x)\,dx + \int_{0}^{1} x^2(1-x)\,dx =$$

$$= \int_{-1}^{0} x^2 + x^3\,dx + \int_{0}^{1} x^2 - x^3\,dx = \left(\frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4}\right)\Bigg|_{x=-1}^{0} + \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right)\Bigg|_{x=0}^{1} =$$

$$= \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = 2\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) = 2\,\frac{4-3}{12} = \frac{2}{12} = \underline{\underline{\frac{1}{6}}}$$