Mathematik 2 für Bauingenieure

Prüfung am 11.10.2019
Reinhard Winkler

Name (bitte ausfüllen):

Matrikelnummer (bitte ausfüllen):

Die mündlichen Prüfungen werden innerhalb von ein, zwei Wochen nach der schriftlichen, möglichst schon ab 14.10. stattfinden. Bitte geben Sie an, welche Tage und Zeiten UNGÜNSTIG für Sie sind. (Je weniger ungünstige Zeiten Sie angeben, desto leichter ist Ihr Wunsch zu erfüllen.) Ich werde mich bemühen, bei der Einteilung auf Ihre Wünsche Rücksicht zu nehmen. Die Einteilung wird Ihnen möglichst bald, spätestens zwei Tage vor der mündlichen Prüfung per TISS-Nachricht bekannt gegeben.

UNGÜNSTIG sind für mich:

Wichtige Hinweise bevor Sie beginnen:

- Die Prüfung besteht aus vier Aufgaben 1, 2, 3, 4, untergliedert in jeweils vier Teilaufgaben A, B, C, D. Zu jeder Teilaufgabe wird maximal ein Punkt vergeben. Ab 8 von 16 möglichen Punkten dürfen Sie jedenfalls zur mündlichen Prüfung antreten.
- Die Arbeitszeit beträgt 90 Minuten.
- Wenn in der Angabe nicht ausdrücklich anders vermerkt, wird zu jeder Teilaufgabe der Punkt (oder Teile eines Punktes) ausschließlich für das vergeben, was Sie unmittelbar neben bzw. unterhalb der Angabe dieser Teilaufgabe niedergeschrieben haben (und nicht unterhalb der horizontalen Trennlinie zur nächsten Teilaufgabe). Drei Punkte ... symbolisieren, dass Sie Ihre Eintragung an dieser Stelle machen bzw. beginnen, ein kleiner Kreis $\circ$, dass Sie Zutreffendes ankreuzen sollen.

  In den meisten Fällen sollte der jeweils vorgesehene Platz für die gesamte Lösung der Aufgabe inklusive Nebenrechnungen ausreichen. Es lohnt daher, wenn Sie sich, bevor Sie mit dem Schreiben beginnen, vergewissern, dass Sie Ihre Antwort entsprechend kurz fassen können. Sollten Sie längere Nebenrechnungen oder sonstige schriftliche Überlegungen durchführen wollen, stehen Ihnen dafür die beiden letzten Blätter dieses Heftes zur Verfügung. Was immer Sie auf den letzten beiden Blättern notieren, wird bei der Punkteauswertung ignoriert.
- Wenn Sie sich noch vor Ausführung der Details einen Überblick darüber verschaffen, was in den einzelnen Aufgaben und ihren Teilen zu tun ist, kann das hilfreich für eine kluge Zeiteinteilung sein.

Nur vom Prüfer auszufüllen:

Punkte für Aufgabe 1: Aufgabe 2: Aufgabe 3: Aufgabe 4: Summe:

Protokoll zur mündlichen Prüfung, sonstige Bemerkungen:

Gesamtnote:

Aufgabe 1: In dieser Aufgabe geht es um Grundbegriffe der Linearen Algebra. Gegeben sind drei Vektoren im $\mathbb{R}^3$:

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Teilaufgabe A: Stellen Sie, sofern möglich, jeden der drei Vektoren $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ und $\mathbf{c}$ als Linearkombination der anderen beiden dar.

- ○ Der Vektor $\mathbf{c}$ hat die Darstellung $\mathbf{c} = r_a\mathbf{a} + r_b\mathbf{b}$ mit $r_a =$ ...2... und $r_b =$ ...2...
- ○ Der Vektor $\mathbf{c}$ lässt sich nicht als Linearkombination von $\mathbf{a}$ und $\mathbf{b}$ darstellen.

- ○ Der Vektor $\mathbf{b}$ hat die Darstellung $\mathbf{b} = s_a\mathbf{a} + s_c\mathbf{c}$ mit $s_a =$ ...-1... und $s_c =$ ...$\frac{1}{2}$...
- ○ Der Vektor $\mathbf{b}$ lässt sich nicht als Linearkombination von $\mathbf{a}$ und $\mathbf{c}$ darstellen.

- ○ Der Vektor $\mathbf{a}$ hat die Darstellung $\mathbf{a} = t_b\mathbf{b} + t_c\mathbf{c}$ mit $t_b =$ ...-1... und $t_c =$ ...$\frac{1}{2}$...
- ○ Der Vektor $\mathbf{a}$ lässt sich nicht als Linearkombination von $\mathbf{b}$ und $\mathbf{c}$ darstellen.

Teilaufgabe B: Geben Sie sämtliche linear abhängigen Teilmengen von $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$ an. Wie viele sind linear unabhängig? (Anmerkung: Eine 3-elementige Menge hat $2^3 = 8$ Teilmengen.)

Die linear abhängigen Teilmengen von $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$ sind: ... {a,b,c}

Die Menge $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$ hat insgesamt ...7... linear unabhängige Teilmengen.

Teilaufgabe C: Definieren Sie, was man unter der Dimension $\dim V$ eines Vektorraums V versteht. (Sie dürfen dabei den Begriff „Basis" verwenden.) Formulieren Sie einen wichtigen allgemeinen Satz, der erklärt, warum $\dim V$ dadurch eindeutig festgelegt wird.

Die Dimension $\dim V$ ist definiert als ... Anzahl der Elemente einer Basis von V.

Diese Definition ist eindeutig, weil der folgende allgemeine Satz gilt:

Je zwei Basen eines Vektorraum V haben gleich viele Elemente.

Teilaufgabe D: Die Vektoren $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ und $\mathbf{c}$ erzeugen einen Unterraum von $\mathbb{R}^3$ (die lineare Hülle von $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ und $\mathbf{c}$), den wir mit U bezeichnen. Welche Dimension $\dim U$ hat U? Begründen Sie Ihre Antwort, indem Sie sich auf die Definition aus Teilaufgabe C und eventuell weitere vorangegangene Teilaufgaben beziehen.

$\dim U =$ ...2..., weil ... z.B {a,b} wegen B linear unabhängig ist
und wegen A auch c und somit ganz U erzeugt.
Es handelt sich also um eine Basis von U mit 2 Elementen.

Aufgabe 2: In dieser Aufgabe wird eine Stelle $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ gesucht, an der die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad \mathbf{x} = (x, y) \mapsto 3(x^2 + y^2),$$

ein Minimum unter der Nebenbedingung

$$\text{N:} \quad 2x + y - 4 = 0$$

annimmt.

Teilaufgabe A: Die Methode der Lagrange-Multiplikatoren ermöglicht es, Extremwertaufgaben für eine Funktion f in zwei Variablen unter einer Nebenbedingung zu ersetzen durch eine Extremwertaufgabe ohne Nebenbedingungen für eine andere Funktion g. Dabei muss man allerdings in Kauf nehmen, dass g von drei Variablen abhängt. Geben Sie die Funktion g für das vorliegende Beispiel an sowie die drei Gleichungen, die sich nach der Methode von Lagrange daraus ergeben und unter deren gemeinsamen Lösungen sich alle gesuchten Extremstellen von f unter der Nebenbedingung N befinden.

$g(x, y, \lambda) := \ldots 3(x^2+y^2) + \lambda \cdot (2x+y-4)$

Folgendes Gleichungssystem muss an der Extremstelle $(x, y, \lambda) = (x_0, y_0, \lambda_0)$ von g erfüllt sein:

$\frac{\partial g}{\partial x} = 6x + 2\lambda = 0, \quad \frac{\partial g}{\partial y} = 6y + \lambda = 0, \quad \frac{\partial g}{\partial \lambda} = 2x + y - 4 = 0$

Teilaufgabe B: Die zu Beginn von Aufgabe 2 angegebene Funktion f hängt von $\mathbf{x} = (x, y)$ nur über den Betrag (= Abstand vom Koordinatenursprung) $r = \|\mathbf{x}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$ ab, genauer: Kennt man von einem Vektor (x, y) nicht die einzelnen Komponenten x und y, immerhin aber seinen Betrag $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, so kann man daraus $f(x, y)$ ermitteln, indem man r in eine geeignete Funktion φ in einer Variablen einsetzt, also $f(x, y) = \varphi(r)$. Geben Sie diese Funktion $\varphi : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}$, $r \mapsto \varphi(r)$ explizit an.

$\varphi(r) := \ldots 3r^2$

Teilaufgabe C: Die Funktion φ aus Teilaufgabe B ist streng monoton wachsend. Folglich wird das Minimum von f unter der Nebenbedingung N an jenem Punkt der durch N beschriebenen Kurve (hier: Gerade) angenommen, der dem Koordinatenursprung am nächsten liegt. Die Nebenbedingung N lässt sich explizit nach y auflösen, somit y als Funktion $y(x) := 4 - 2x$ in x darstellen. Die ursprünglich gesuchte Minimalstelle (x_0, y_0) unter der Nebenbedingung N ergibt sich daher auch, wenn man jenes x_0 aufsucht, so dass das Quadrat $q(x) := x^2 + y(x)^2 = x^2 + (4 - 2x)^2$ des Abstandes eines Punktes $(x, y(x))$ vom Koordinatenursprung für $x = x_0$ minimal ist. Daher ist x_0 die Lösung einer nun von Ihnen anzugebenden Gleichung G in einer Variablen x.

Die Gleichung G lautet: $\ldots q'(x) = 2x - 4(4-2x) = 10x - 16 = 0$

Sie hat die Lösung $x_0 = \ldots \frac{16}{10} = \frac{8}{5} = 1{,}6$

Teilaufgabe D: Ermitteln Sie eine Lösung (x_0, y_0, λ_0) des Gleichungssystems aus Teilaufgabe A. (Hinweis: Sie können einfach das System aus Teilaufgabe A lösen, Sie können sich die Arbeit aber auch mit Hilfe von Teilaufgabe C erleichtern.)

$x_0 = \ldots \frac{8}{5} = 1{,}6 \qquad y_0 = \ldots 4 - 2x_0 = \frac{4}{5} = 0{,}8 \qquad \lambda_0 = \ldots -6y_0 = -\frac{24}{5} = -4{,}8$

Aufgabe 3: Ein n-dimensionales Vektorfeld ist eine Abbildung $\mathbf{v} : G_n \to \mathbb{R}^n$, wobei G_n eine offene Menge in $\mathbb{R}^n$ ist. Für $n = 2$ bzw. $n = 3$ schreiben wir

$$\mathbf{v}(x,y) = \begin{pmatrix} u(x,y) \\ v(x,y) \end{pmatrix} \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{v}(x,y,z) = \begin{pmatrix} u(x,y,z) \\ v(x,y,z) \\ w(x,y,z) \end{pmatrix}$$

In dieser Aufgabe geht es um Divergenz $\mathrm{div}(\mathbf{v})$ und Rotation $\mathrm{rot}(\mathbf{v})$ von $\mathbf{v}$.

Teilaufgabe A: Für $n = 2$ und $n = 3$ sind für ein differenzierbares n-dimensionales Vektorfeld $\mathbf{v} : G_n \to \mathbb{R}^n$ sowohl Divergenz $\mathrm{div}(\mathbf{v})$ als auch Rotation $\mathrm{rot}(\mathbf{v})$ definiert. Und zwar handelt es sich wieder um auf G_n definierte Funktionen mit Werten in einem Raum $\mathbb{R}^k$ mit geeignetem $k \in \mathbb{N}$. Geben Sie das korrekte k an.

Für $n = 2$ ist $\quad \mathrm{div}(\mathbf{v}) : G_2 \to \mathbb{R}^k$ mit $k = 1$

Für $n = 2$ ist $\quad \mathrm{rot}(\mathbf{v}) : G_2 \to \mathbb{R}^k$ mit $k = 1$

Für $n = 3$ ist $\quad \mathrm{div}(\mathbf{v}) : G_3 \to \mathbb{R}^k$ mit $k = 1$

Für $n = 3$ ist $\quad \mathrm{rot}(\mathbf{v}) : G_3 \to \mathbb{R}^k$ mit $k = 3$

Teilaufgabe B: Definieren Sie die Divergenz $\mathrm{div}(\mathbf{v})$ eines n-dimensionalen Vektorfeldes für $n = 2$ und $n = 3$:

Für $n = 2$ ist $\quad \mathrm{div}\begin{pmatrix} u(x,y) \\ v(x,y) \end{pmatrix} := \ldots\ u_x + v_y = \dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial v}{\partial y}$

Für $n = 3$ ist $\quad \mathrm{div}\begin{pmatrix} u(x,y,z) \\ v(x,y,z) \\ w(x,y,z) \end{pmatrix} := u_x + v_y + w_z = \dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial v}{\partial y} + \dfrac{\partial w}{\partial z}$

Teilaufgabe C: Definieren Sie die Rotation $\mathrm{rot}(\mathbf{v})$ eines n-dimensionalen Vektorfeldes für $n = 2$ und $n = 3$:

Für $n = 2$ ist $\quad \mathrm{rot}\begin{pmatrix} u(x,y) \\ v(x,y) \end{pmatrix} := v_x - u_y = \dfrac{\partial v}{\partial x} - \dfrac{\partial u}{\partial y}$

Für $n = 3$ ist $\quad \mathrm{rot}\begin{pmatrix} u(x,y,z) \\ v(x,y,z) \\ w(x,y,z) \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} w_y - v_z \\ u_z - w_x \\ v_x - u_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial w}{\partial y} - \dfrac{\partial v}{\partial z} \\ \dfrac{\partial u}{\partial z} - \dfrac{\partial w}{\partial x} \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} - \dfrac{\partial u}{\partial y} \end{pmatrix}$

Teilaufgabe D: Wie lautet der Integralsatz von Gauß (Divergenzsatz)? Geben Sie auch an, um welche Art von Integralen (Bereichs-, Kurven-, Oberflächenintegral, erster oder zweiter Art?) es sich bei den in der Formel vorkommenden handelt.

$$\underbrace{\iint_F \bar{v}\, d\bar{O}}_{\text{Oberflächenintegral 2. Art}} = \underbrace{\iiint_D \mathrm{div}\,\bar{v}\, dx\, dy\, dz}_{\text{Bereichsintegral}}$$

$D \subseteq \mathbb{R}^3$ beschränkter, abgeschlossener, elementarer Bereich

F geschlossene Fläche, die D berandet, bestehend aus endlich vielen Flächenstücken mit stetig differenzierbaren Parametrisierung und Normalen nach außen (bzgl. D)

$\bar{V} : \mathbb{R}^3 \supseteq G \to \mathbb{R}^3$ stetig differenzierbares Vektorfeld

$G \supseteq D$ Gebiet (offen, zusammenhängend)

Aufgabe 4: Eine Differentialgleichung der Form $y'(t) = f(t, y)$ heißt explizit. Dabei ist $f : \mathbb{R}^2 \supseteq D \to \mathbb{R}$. Man spricht von einem Anfangswertproblem, wenn überdies ein innerer Punkt (t_0, y_0) in D vorgegeben ist und nur Lösungsfunktionen y mit $y(t_0) = y_0$ zugelassen sind. Bekanntlich lassen sich solche Differentialgleichungen (unter geeigneten, nicht sehr einschränkenden Voraussetzungen) approximativ lösen. Dabei spielt eine Transformation T eine wichtige Rolle, die einer reellen Funktion $y = y(t)$ in der Variablen t die Funktion

$$T_y : t \mapsto y_0 + \int_{t_0}^{t} f(x, y(x))\, dx,$$

ebenfalls in der Variablen t, zuordnet. Diese Transformation T spielt die Hauptrolle in dieser Aufgabe.

Teilaufgabe A: Die numerische Lösungsmethode verwendet den Banachschen Fixpunktsatz (Kontraktionsprinzip), angewendet auf T und den Raum der stetigen Funktionen auf einer geeigneten Umgebung von t_0. Man beginnt mit der konstanten Funktion, die den Wert y_0 annimmt, und definiert rekursiv eine Folge von Funktionen y_n, $n \in \mathbb{N}$. Geben Sie die Rekursionsformel, die beschreibt, wie sich y_{n+1} aus y_n ergibt, explizit an. (Hinweis: $y_{n+1} = T_{y_n}$)

$y_{n+1}(t) := \ldots y_0 + \int_{t_0}^{t} f(x, y_n(x))\, dx$

Teilaufgabe B: Sei speziell $f(x, y) := y^2 + 1$, $t_0 = 1$ und $y_0 = 2$. Berechnen Sie die Funktion y_1 gemäß der Rekursion aus Teilaufgabe A.

$y_1(t) = \ldots \underset{\overset{\shortparallel}{2}}{y_0} + \int_{\underset{\overset{\shortparallel}{1}}{t_0}}^{t} f(x, \underbrace{y_0(x)}_{=2})\, dx = 2 + \int_1^t (2^2+1)\, dx = 2 + (t-1)\cdot 5 = 5t - 3$

Teilaufgabe C: Unter welchen allgemeinen Bedingungen an f konvergieren die Funktionen y_n für $n \to \infty$ in einer Umgebung von t_0 gegen eine Lösung y des Anfangswertproblems?

f stetig und Lipschitz-stetig in y, d.h.:

$\exists \lambda \in \mathbb{R}\ \forall t, y_1, y_2$ mit $(t,y_1),(t,y_2) \in D: |f(x,y_1) - f(x,y_2)| \leq \lambda \cdot |y_1 - y_2|$

Teilaufgabe D: Eine Funktion y heißt Fixpunkt von T, wenn $T_y = y$ gilt. Begründen Sie, warum ein Fixpunkt von T eine Lösung des gegebenen Anfangswertproblems ist. (Hinweis: Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung)

$T_y = y$ bedeutet $y(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(x, y(x))\, dx$ für alle t.

Ableiten nach t liefert laut Hauptsatz $y'(t) = \left(y_0 + \int_{t_0}^{t} f(x,y(x))\,dx\right)' \overset{\text{HS}}{=} f(t, y(t))$.

Raum für Nebenrechnungen und sonstige Notizen, die bei der Beurteilung ignoriert werden.