

Mathematik 2 für Bauingenieure

Prüfung am 29.11.2019
Reinhard Winkler

Name (bitte ausfüllen):

Matrikelnummer (bitte ausfüllen):

Die mündlichen Prüfungen werden möglichst im Laufe der kommenden Woche ab 2.12. stattfinden. Bitte geben Sie an, welche Tage und Zeiten UNGÜNSTIG für Sie sind. (Je weniger ungünstige Zeiten Sie angeben, desto leichter ist Ihr Wunsch zu erfüllen.) Ich werde mich bemühen, bei der Einteilung auf Ihre Wünsche Rücksicht zu nehmen. Die Einteilung wird Ihnen möglichst bald, spätestens zwei Tage vor der mündlichen Prüfung per TISS-Nachricht bekannt gegeben.

UNGÜNSTIG sind für mich:

Wichtige Hinweise bevor Sie beginnen:

- Die Prüfung besteht aus vier Aufgaben 1, 2, 3, 4, untergliedert in jeweils vier Teilaufgaben A, B, C, D. Zu jeder Teilaufgabe wird maximal ein Punkt vergeben. Ab 8 von 16 möglichen Punkten dürfen Sie jedenfalls zur mündlichen Prüfung antreten.
- Die Arbeitszeit beträgt 90 Minuten.
- Wenn in der Angabe nicht ausdrücklich anders vermerkt, wird zu jeder Teilaufgabe der Punkt (oder Teile eines Punktes) ausschließlich für das vergeben, was Sie unmittelbar neben bzw. unterhalb der Angabe dieser Teilaufgabe niedergeschrieben haben (und nicht unterhalb der horizontalen Trennlinie zur nächsten Teilaufgabe). Drei Punkte ... symbolisieren, dass Sie Ihre Eintragung an dieser Stelle machen bzw. beginnen, ein kleiner Kreis \circ , dass Sie Zutreffendes ankreuzen sollen.

In den meisten Fällen sollte der jeweils vorgesehene Platz für die gesamte Lösung der Aufgabe inklusive Nebenrechnungen ausreichen. Es lohnt daher, wenn Sie sich, bevor Sie mit dem Schreiben beginnen, vergewissern, dass Sie Ihre Antwort entsprechend kurz fassen können. Sollten Sie längere Nebenrechnungen oder sonstige schriftliche Überlegungen durchführen wollen, stehen Ihnen dafür die beiden letzten Blätter dieses Heftes zur Verfügung. Was immer Sie auf den letzten beiden Blättern notieren, wird bei der Punkteauswertung ignoriert.

- Wenn Sie sich noch vor Ausführung der Details einen Überblick darüber verschaffen, was in den einzelnen Aufgaben und ihren Teilen zu tun ist, kann das hilfreich für eine kluge Zeiteinteilung sein.

Nur vom Prüfer auszufüllen:

Punkte für Aufgabe 1: Aufgabe 2: Aufgabe 3: Aufgabe 4: Summe:

Protokoll zur mündlichen Prüfung, sonstige Bemerkungen:

Gesamtnote:

Aufgabe 1: In dieser Aufgabe geht es um Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Teilaufgabe A: Berechnen Sie sämtliche Eigenwerte von A .

Die Rechnung ... $\det(A - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 3-\lambda & 0 \\ 1 & 1 & 2-\lambda \end{pmatrix} = (2-\lambda)(3-\lambda)(2-\lambda)$

zeigt, dass A genau die Eigenwerte ... $\lambda=2$ und $\lambda=3$ hat.

Teilaufgabe B: Wählen Sie als λ einen der Eigenwerte aus Teilaufgabe A und ermitteln Sie einen oder mehrere (linear unabhängige) zugehörige Eigenvektoren, die eine Basis des zugehörigen Eigenraumes E_λ bilden.

Für $\lambda = 2$... liefert die Rechnung $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} y=0 \\ x+y=0 \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} x=0 \\ y=0 \\ z \text{ beliebig} \end{matrix}$

für E_λ die Basis bestehend aus dem Eigenvektor bzw. aus den Eigenvektoren $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Teilaufgabe C: Wählen Sie als λ einen anderen der Eigenwerte aus Teilaufgabe A und ermitteln Sie einen oder mehrere zugehörige Eigenvektoren, die eine Basis des zugehörigen Eigenraumes bilden.

Für $\lambda = 3$... liefert die Rechnung $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} -x=0 \\ x+y-z=0 \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} x=0 \\ y=z \end{matrix}$

für E_λ die Basis bestehend aus dem Eigenvektor bzw. aus den Eigenvektoren $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Teilaufgabe D: Ist die Matrix A diagonalisierbar? Wenn ja, geben Sie eine Diagonalform D von A an; wenn nein, begründen Sie dies.

o Ja, A ist diagonalisierbar, z.B. zur Matrix $D = \dots$

X Nein, A ist nicht diagonalisierbar, weil ... es nur $2 < 3$ linear unabhängige Eigenvektoren, also keine Basis aus Eigenvektoren gibt.

Aufgabe 2: In dieser Aufgabe geht es um die Ableitung der Funktion

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad \mathbf{x} = (x, y) \mapsto xe^{xy}.$$

Teilaufgabe A: Die partielle Ableitung $\frac{\partial f}{\partial x}(1, -1)$ von f nach der ersten Variablen x an der Stelle $(1, -1)$ lässt sich als Differentialquotient

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1, -1) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{g(x) - g(1)}{x - 1}$$

einer geeigneten reellen Funktion $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ schreiben. Geben Sie so ein g an.

$$g(x) := \dots f(x, -1) = xe^{-x}$$

Teilaufgabe B: Berechnen Sie die partielle Ableitung $\frac{\partial f}{\partial x}(1, -1)$ aus Teilaufgabe A unter Verwendung üblicher Ableitungsregeln.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1, -1) = g'(1) = -xe^{-x} + e^{-x} \Big|_{x=1} = -\frac{1}{e} + \frac{1}{e} = 0$$

Teilaufgabe C: Die Ableitung $f'_{(1, -1)}$ von f an der Stelle $(1, -1)$ ist eine lineare Abbildung von \mathbb{R}^2 nach \mathbb{R} , hat daher die Gestalt $f'_{(1, -1)}(x, y) = ax + by$. Ermitteln Sie die Koeffizienten $a, b \in \mathbb{R}$.

Die Rechnung ... $\frac{\partial f}{\partial y}(1, -1) = x^2 e^{xy} \Big|_{\substack{x=1 \\ y=-1}} = e^{-1} = \frac{1}{e}$

zusammen mit Teilaufgabe B liefert die Werte $a = \dots 0$ und $b = \dots \frac{1}{e}$...

Teilaufgabe D: Die Funktion f liefert ein Funktionsgebirge bestehend aus den Punkten $(x, y, f(x, y))$, $x, y \in \mathbb{R}$, an das im Punkt $\mathbf{x}_0 = (1, -1, f(1, -1))$ eine Tangentialebene τ gelegt werden kann. Diese Ebene hat eine Parameterdarstellung der Gestalt $\tau = \{\mathbf{x}_0 + s\mathbf{x}_1 + t\mathbf{x}_2 : s, t \in \mathbb{R}\}$. Dabei ist \mathbf{x}_0 ein Ortsvektor, \mathbf{x}_1 und \mathbf{x}_2 sind zwei geeignete Richtungsvektoren. Geben Sie solche Vektoren an.

$$\mathbf{x}_0 = \dots \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ \frac{1}{e} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{x}_1 = \dots \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{x}_2 = \dots \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{1}{e} \end{pmatrix}$$

Aufgabe 3: Bekanntlich lässt sich die Einheitskugel K im \mathbb{R}^3 als Menge $K = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$ darstellen. Durch Modifikation dieser Darstellung entsteht die Menge

$$M := \{(x, y, z) : \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} + \frac{z^2}{2} \leq 1\},$$

um die es in dieser Aufgabe geht.

Teilaufgabe A: Sei $S_x := \{x \in \mathbb{R} : (x, 0, 0) \in M\}$ der Schnitt von M mit der x -Achse, analog $S_y := \{y \in \mathbb{R} : (0, y, 0) \in M\}$ der Schnitt mit der y - und $S_z := \{z \in \mathbb{R} : (0, 0, z) \in M\}$ der Schnitt mit der z -Achse. Geben Sie diese Mengen in Intervallschreibweise an.

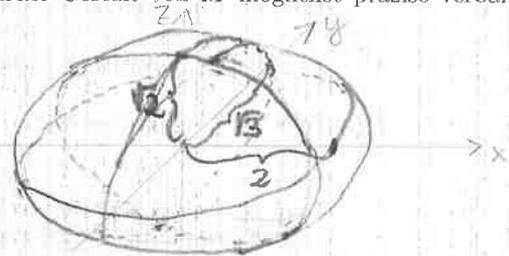
$$S_x = [-2, 2]$$

$$S_y = [-\sqrt{3}, \sqrt{3}]$$

$$S_z = [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$$

Teilaufgabe B: Beschreiben Sie die geometrische Gestalt von M möglichst präzise verbal und/oder mit einer Skizze.

Ellipsoid in Hauptlage
(d.h. mit den Koordinatenachsen
als Ellipsoid-Achsen) mit den
Achsenlängen $4, 2\sqrt{3}, 2\sqrt{2}$



Teilaufgabe C: Bekanntlich ist $\lambda_3(K) = \frac{4}{3}\pi$ das Volumen der Einheitskugel. Verwenden Sie Teilaufgabe B um daraus durch geometrische Überlegungen, d.h. ohne Rechnung, das Volumen $\lambda_3(M)$ von M zu ermitteln. Formulieren Sie Ihre Überlegungen wenigstens in Stichworten.

... K muss entlang der x -Achse um einen Faktor 2 gestreckt werden, um M zu erhalten, entlang der y - und z -Achse um die Faktoren $\sqrt{3}$ und $\sqrt{2}$. Damit vergrößert sich das Volumen insgesamt um den Faktor $2 \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{2} = 2\sqrt{6}$

$$\text{Deshalb ist } \lambda_3(M) = \dots \frac{4}{3}\pi \cdot 2\sqrt{6} = \frac{8\sqrt{6}}{3}\pi.$$

Teilaufgabe D: Die Überlegungen aus Teilaufgabe C lassen sich mit Hilfe der Substitutionsregel auch in eine Rechnung fassen. Geben Sie eine geeignete Variablensubstitution $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $(s, t, u) \mapsto (x(s, t, u), y(s, t, u), z(s, t, u))$ an, so dass $T(K) = M$ gilt.

$$x(s, t, u) = 2s$$

$$y(s, t, u) = \sqrt{3}t$$

$$z(s, t, u) = \sqrt{2}u$$

Aufgabe 4: In dieser Aufgabe geht es um ein wahrscheinlichkeitstheoretisches Modell für n -maligen Münzwurf („Kopf oder Zahl“, kurz: K oder Z). Wie üblich werden die einzelnen Würfe als unabhängig voneinander angenommen. Nicht sei jedoch von vornherein klar, ob die Münze fair ist. Die Wahrscheinlichkeit p für K (bei einem einzigen Wurf) kann also eine beliebige Zahl aus $[0, 1]$ sein.

Für den zugehörigen Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ lässt sich $\Omega = \{K, Z\}^n$ daher als Menge aller Folgen der Länge n , bestehend aus den Symbolen K und Z auffassen. Jedes $\omega \in \Omega$ ist daher von der Gestalt $\omega = (a_1, \dots, a_n)$ mit $a_i \in \{K, Z\}$. Die σ -Algebra \mathcal{A} der messbaren Ereignisse besteht aus sämtlichen Teilmengen von Ω .

Die Zufallsgröße X_i nehme an der Stelle $\omega = (a_1, \dots, a_n)$ den Wert $X_i(\omega) = 1$ an, wenn der i -te Wurf das Ergebnis K liefert (wenn also $a_i = K$), sonst (d.h. wenn $a_i = Z$) den Wert $X_i(\omega) = 0$. Außerdem seien die Zufallsgrößen S_n als Summen $S := \sum_{i=1}^n X_i$ definiert.

Teilaufgabe A: Bestimmen Sie mit Hilfe der allgemeinen Definition von Erwartungswert \mathbb{E} und Varianz \mathbb{V} diese Werte für X_i .

Die Rechnung ... $\mathbb{E}(X_i) = 1 \cdot \mathbb{P}(X_i=1) + 0 \cdot \mathbb{P}(X_i=0) = \mathbb{P}(X_i=1) = p.$

zeigt $\mathbb{E}(X_i) = \dots p$

Die Rechnung ... $\mathbb{V}(X_i) = (1 - \mathbb{E}(X_i))^2 \cdot \mathbb{P}(X_i=1) + (0 - \mathbb{E}(X_i))^2 \cdot \mathbb{P}(X_i=0) = (1-p)^2 \cdot p + p^2(1-p) = p(1-p) \cdot (1-p+p) = p(1-p)$

zeigt $\mathbb{V}(X_i) = \dots p(1-p)$

Teilaufgabe B: Wie Teilaufgabe A, nur für S statt für X_i . Formulieren Sie explizit, welche Rechenregeln Sie verwenden und geben Sie an, welche Voraussetzung/en dabei entscheidend ist/sind. Geben Sie nur relevante Voraussetzungen an.

$\mathbb{E}(S) = \dots \mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) \stackrel{A}{=} \sum_{i=1}^n \mathbb{E}(X_i) \stackrel{A}{=} \sum_{i=1}^n p = n \cdot p$
gilt für beliebige Zufallsgrößen X_i

$\mathbb{V}(S) = \dots \mathbb{V}\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) \stackrel{X_i \text{ unabhängig}}{=} \sum_{i=1}^n \mathbb{V}(X_i) \stackrel{A}{=} \sum_{i=1}^n p(1-p) = np(1-p)$

Teilaufgabe C: Geben Sie eine Formel für $p_k := \mathbb{P}(S = k)$ für $k = 0, 1, \dots, n$ an.

$p_k = \mathbb{P}(S = k) = \dots \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, \quad \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

Teilaufgabe D: Die Verteilung der Zufallsgröße S_n ist auf die Werte $k = 0, \dots, n$ konzentriert und damit durch die Zahlen $p_k := \mathbb{P}(S = k)$, $k = 0, \dots, n$, eindeutig bestimmt. Geben Sie diese Zahlen für $p = \frac{1}{3}$ (unfairer Würfel!) und $n = 5$ als Brüche an.

Für $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ folgt aus Teilaufgabe C: $p_k = \binom{5}{k} \left(\frac{1}{3}\right)^k \left(\frac{2}{3}\right)^{5-k}$, speziell also: $\binom{5}{0} = \binom{5}{5} = 1$, $\binom{5}{1} = \binom{5}{4} = 5$, $\binom{5}{2} = \binom{5}{3} = 10$

$p_0 = \frac{32}{243}$ $p_1 = \frac{80}{243}$ $p_2 = \frac{80}{243}$ $p_3 = \frac{40}{243}$ $p_4 = \frac{10}{243}$ $p_5 = \frac{1}{243}$

$3^5 = 243$