

Mathematik 2 für Bauingenieure

Prüfung am 17.1.2020
Reinhard Winkler

Name (bitte ausfüllen):

Matrikelnummer (bitte ausfüllen):

Die mündlichen Prüfungen werden möglichst im Laufe der kommenden Woche, d.h. in der Zeit vom 20. bis 24.1. stattfinden. Bitte geben Sie an, welche Tage und Zeiten UNGÜNSTIG für Sie sind. (Je weniger ungünstige Zeiten Sie angeben, desto leichter ist Ihr Wunsch zu erfüllen.) Ich werde mich bemühen, bei der Einteilung auf Ihre Wünsche Rücksicht zu nehmen. Die Einteilung wird Ihnen möglichst noch heute, spätestens aber zwei Tage vor der mündlichen Prüfung per TISS-Nachricht bekannt gegeben.

UNGÜNSTIG sind für mich:

Wichtige Hinweise bevor Sie beginnen:

- Die Prüfung besteht aus vier Aufgaben 1, 2, 3, 4, untergliedert in jeweils vier Teilaufgaben A, B, C, D. Zu jeder Teilaufgabe wird maximal ein Punkt vergeben. Ab 8 von 16 möglichen Punkten dürfen Sie jedenfalls zur mündlichen Prüfung antreten.
- Die Arbeitszeit beträgt 90 Minuten.
- Wenn in der Angabe nicht ausdrücklich anders vermerkt, wird zu jeder Teilaufgabe der Punkt (oder Teile eines Punktes) ausschließlich für das vergeben, was Sie unmittelbar neben bzw. unterhalb der Angabe dieser Teilaufgabe niedergeschrieben haben (und nicht unterhalb der horizontalen Trennlinie zur nächsten Teilaufgabe). Drei Punkte ... symbolisieren, dass Sie Ihre Eintragung an dieser Stelle machen bzw. beginnen, ein kleiner Kreis \circ , dass Sie Zutreffendes ankreuzen sollen.

In den meisten Fällen sollte der jeweils vorgesehene Platz für die gesamte Lösung der Aufgabe inklusive Nebenrechnungen ausreichen. Es lohnt daher, wenn Sie sich, bevor Sie mit dem Schreiben beginnen, vergewissern, dass Sie Ihre Antwort entsprechend kurz fassen können. Sollten Sie längere Nebenrechnungen oder sonstige schriftliche Überlegungen durchführen wollen, stehen Ihnen dafür die beiden letzten Blätter dieses Heftes zur Verfügung. Was immer Sie auf den letzten beiden Blättern notieren, wird bei der Punkteauswertung ignoriert.

- Wenn Sie sich noch vor Ausführung der Details einen Überblick darüber verschaffen, was in den einzelnen Aufgaben und ihren Teilen zu tun ist, kann das hilfreich für eine kluge Zeiteinteilung sein.

Nur vom Prüfer auszufüllen:

Punkte für Aufgabe 1: Aufgabe 2: Aufgabe 3: Aufgabe 4: Summe:

Protokoll zur mündlichen Prüfung, sonstige Bemerkungen:

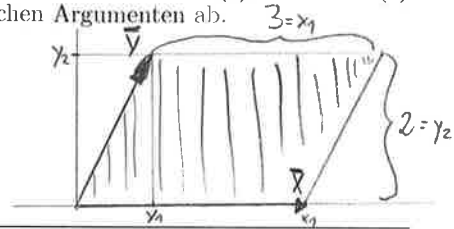
Gesamtnote:

Aufgabe 1: In dieser Aufgabe geht es um das von zwei Vektoren

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

in der Ebene \mathbb{R}^2 aufgespannte Parallelogramm $P = P(x_1, x_2, y_1, y_2) := \{s\mathbf{x} + t\mathbf{y} : s, t \in [0, 1]\}$, um seine Fläche $F = F(x_1, x_2, y_1, y_2) := \lambda_2(P)$ und um die mit der Fläche zusammenhängende Multilinearform.

Teilaufgabe A: Skizzieren Sie \mathbf{x}, \mathbf{y} und P für den Spezialfall $\mathbf{x} = 3\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ und lesen Sie daraus die Fläche F mit elementargeometrischen Argumenten ab.



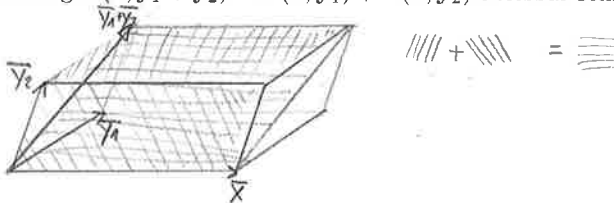
Die Skizze zeigt $F = F(3, 0, 1, 2) = 3 \cdot 2 = 6$

Teilaufgabe B: Verallgemeinern Sie Ihre Überlegungen aus Teilaufgabe A auf den Fall beliebiger Vektoren \mathbf{x} und \mathbf{y} mit der einzigen Einschränkung $x_2 = 0$ zu einer Formel für die Fläche $F = F(x_1, 0, y_1, y_2)$.

vgl. Skizze in Teilaufgabe A

Die Skizze zeigt $F = F(x_1, 0, y_1, y_2) = |x_1 \cdot y_2|$

Teilaufgabe C: Bis auf das Vorzeichen ist die Fläche F eines Parallelogramms P eine multilinäre Funktion der aufspannenden Vektoren \mathbf{x} und \mathbf{y} . Fertigen Sie zur Illustration eine Skizze an (es dürfen auch zwei oder drei Skizzen sein) mit Vektoren \mathbf{x}, \mathbf{y}_1 und \mathbf{y}_2 . Dabei sollen je zwei dieser drei Vektoren linear unabhängig sein, außerdem soll aus der Skizze (bzw. aus den Skizzen) die Beziehung $F(\mathbf{x}, \mathbf{y}_1 + \mathbf{y}_2) = F(\mathbf{x}, \mathbf{y}_1) + F(\mathbf{x}, \mathbf{y}_2)$ ablesbar sein. Begründen Sie dies!



Teilaufgabe D: Gesucht ist u.a. der Name jener multi-, in diesem Fall (wegen $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^2$) bilinearen Funktion $m : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, für die gilt: $F(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = |m(\mathbf{x}, \mathbf{y})|$, $m(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1) = m(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2) = 0$ und $m(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) = -m(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1) = 1$. Als bilineare Funktion erfüllt m eine Beziehung der Bauart

$$m(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = m\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) = c_{1,1}x_1y_1 + c_{1,2}x_1y_2 + c_{2,1}x_2y_1 + c_{2,2}x_2y_2$$

mit gewissen reellen Koeffizienten $c_{i,j}$. Geben Sie auch diese Koeffizienten an.

Die Funktion m heißt auch **Determinante**

Die Koeffizienten haben die Werte:

$$c_{1,1} = 0 \qquad c_{1,2} = 1 \qquad c_{2,1} = -1 \qquad c_{2,2} = 0$$

Aufgabe 2: Gegeben ist die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad \mathbf{x} = (x, y) \mapsto ye^{xy},$$

in zwei Variablen. Gesucht ist ihre Ableitung. Im Gegensatz zu reellen Funktionen in einer Variable sind hier zu unterscheiden: partielle Ableitungen (die auch als Funktionen in einer Variablen bei konstanter anderer Variablen interpretiert werden können), allgemeine Richtungsableitungen (in dieser Aufgabe kommen aber nur die partiellen vor) und die Ableitung f' . Bei f' handelt es sich um eine Funktion, die jedem Punkt $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ eine lineare Funktion $f'_{\mathbf{x}} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ zuordnet, genannt auch das Differential der ursprünglichen Funktion f in \mathbf{x} . Eine Veranschaulichung dieser Situation ist die im Punkt $(x, y, f(x, y)) \in \mathbb{R}^3$ an das Funktionsgebirge von f angelegte Tangentialebene $\tau \subseteq \mathbb{R}^3$. In dieser Aufgabe geht es anhand der gegebenen Funktion f um all diese Begriffe und ihre Beziehung zueinander.

Teilaufgabe A: Die partielle Ableitung $\frac{\partial f}{\partial y}(2, 0)$ von f nach der zweiten Variablen y an der Stelle $(2, 0)$ lässt sich definitionsgemäß als Differentialquotient

$$\frac{\partial f}{\partial y}(2, 0) = g'(0) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{g(y) - g(0)}{y - 0}$$

einer geeigneten reellen Funktion $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $y \mapsto g(y)$, an der Stelle $y = 0$ schreiben. Geben Sie g als Funktion in y an.

$$g(y) := f(2, y) = y \cdot e^{2y}$$

Teilaufgabe B: Berechnen Sie $g'(y)$ und damit die partielle Ableitung $\frac{\partial f}{\partial y}(2, y)$ zunächst für variables y und dann den speziellen Wert $\frac{\partial f}{\partial y}(2, 0)$ aus Teilaufgabe A.

$$g'(y) = \frac{\partial f}{\partial y}(2, y) = 2ye^{2y} + e^{2y} = (2y+1)e^{2y} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(2, 0) = 1$$

Teilaufgabe C: Nun geht es um die Ableitung f' (das Differential von f) an der Stelle $(2, 0)$. Gesucht ist also $f'_{(2,0)}$. Dabei handelt es sich um eine lineare Abbildung von \mathbb{R}^2 nach \mathbb{R} . Als solche ist $f'_{(2,0)}$ gegeben durch $f'_{(2,0)}(x, y) = ax + by$ mit geeigneten Koeffizienten $a, b \in \mathbb{R}$. Berechnen Sie diese.

$$\text{Die Rechnung ... } \left. \frac{\partial f}{\partial x}(2, 0) = y^2 e^{xy} \right|_{\substack{x=2 \\ y=0}} = 0$$

zusammen mit Teilaufgabe B liefert die Werte $a = \dots 0 \dots$ und $b = \dots 1 \dots$

Teilaufgabe D: Die Funktion f samt Differential $f'_{(2,0)}$ lässt sich auch als Funktionsgebirge, bestehend aus allen Punkten $(x, y, f(x, y))$, $x, y \in \mathbb{R}$, veranschaulichen, an das im Punkt $\mathbf{x}_0 = (2, 0, f(2, 0))$ eine Tangentialebene τ gelegt wird. Diese Ebene hat eine Parameterdarstellung der Gestalt $\tau = \{\mathbf{x}_0 + s\mathbf{x}_1 + t\mathbf{x}_2 : s, t \in \mathbb{R}\}$. Dabei ist \mathbf{x}_0 ein Ortsvektor, während \mathbf{x}_1 und \mathbf{x}_2 zwei geeignete Richtungsvektoren sind. Geben Sie solche Vektoren an.

$$\mathbf{x}_0 = \dots \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{x}_1 = \dots \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{x}_2 = \dots \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 3: Sei D_F ein Teilbereich der Ebene, auf dem eine Parametrisierung

$$F : \mathbb{R}^2 \supseteq D_F \rightarrow G \subseteq \mathbb{R}^3, \quad \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x(s, t) \\ y(s, t) \\ z(s, t) \end{pmatrix},$$

einer Fläche im Raum gegeben ist. Dabei sei $G \subseteq \mathbb{R}^3$ ein Gebiet, auf dem ein Vektorfeld $\mathbf{v} : G \rightarrow \mathbb{R}^3$ definiert ist. Das Oberflächenintegral zweiter Art $I := \int_F \mathbf{v} \, d\mathbf{O}$ gibt, anschaulich gesprochen, den gesamten Durchfluss der durch \mathbf{v} dargestellten Strömung durch die Fläche F an. In dieser Aufgabe geht es um eben solche Oberflächenintegrale zweiter Art. Zunächst beginnen wir jedoch mit Vorbereitungen anhand einfacherer Situationen.

Teilaufgabe A: Sei $D_F = [0, 1]^2$ das Einheitsquadrat, F linear (d.h. die Parametrisierung einer Ebene durch den Ursprung). Dann ist F eindeutig durch seine (vektoriellen) Werte $F(\mathbf{e}_1), F(\mathbf{e}_2) \in \mathbb{R}^3$ für die kanonischen Basisvektoren $\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ festgelegt. Beschreiben Sie verbal oder mit einer Formel, wie sich die Größe der durch F dargestellten Oberfläche O im Raum aus den beiden Vektoren $F(\mathbf{e}_1)$ und $F(\mathbf{e}_2)$ ergibt bzw. berechnen lässt.

$$O = \dots \left\| F(\vec{e}_1) \times F(\vec{e}_2) \right\|$$

Teilaufgabe B: Sei F wie in Teilaufgabe A, d.h. linear. Angenommen, alle Werte $\mathbf{v}(x, y, z)$ des Vektorfeldes \mathbf{v} liegen in F (genauer: im Wertebereich von F). Was bedeutet das für das Oberflächenintegral $I = \int_F \mathbf{v} \, d\mathbf{O}$? Hier ist keine Rechnung gefragt, eine anschauliche Begründung genügt.

$I=0$, weil kein Durchfluss von \vec{v} durch F stattfindet, sondern nur entlang F .

Teilaufgabe C: Teilaufgabe B werde dahingehend modifiziert, dass die (vektoriellen) Werte von \mathbf{v} nicht notwendig in der von F parametrisierten Ebene liegen, \mathbf{v} dafür aber konstant sei mit $\mathbf{v}(x, y, z) = \mathbf{v}_0$. F sei weiterhin linear und auf dem Einheitsquadrat definiert. Dann ist das Oberflächenintegral $I = \int_F \mathbf{v} \, d\mathbf{O}$ gleich dem Skalarprodukt $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ zweier Vektoren $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$, die sich auf einfache Weise mit Hilfe der drei Vektoren $F(\mathbf{e}_1), F(\mathbf{e}_2)$ und \mathbf{v}_0 darstellen lassen. Wie?

$$\mathbf{a} = \dots \left(F(\vec{e}_1) \times F(\vec{e}_2) \right) \quad \mathbf{b} = \dots \vec{v}_0$$

Teilaufgabe D: Wir behalten als Definitionsbereich von F weiterhin das Einheitsquadrat $D_F := [0, 1]^2$ bei, sonst verallgemeinern wir aber wie folgt. F sei nicht mehr als linear, sondern allgemeiner als beliebig stetig differenzierbar vorausgesetzt. Außerdem sei

$$\mathbf{v} : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} v_1(x, y, z) \\ v_2(x, y, z) \\ v_3(x, y, z) \end{pmatrix}$$

nicht mehr konstant, sondern beliebig stetig. Stellen Sie das Oberflächenintegral $I = \int_F \mathbf{v} \, d\mathbf{O}$ als Doppelintegral mit den Integrationsvariablen s und t dar, die beide (unabhängig voneinander) das Einheitsintervall $[0, 1]$ durchlaufen. (Hinweis: Im Integranden kommen die Ableitungen F_s und F_t bzw., bei **komponentenweiser** Notation, x_s, y_s, z_s, x_t, y_t und z_t nach s und t vor.)

$$I := \dots \int_0^1 \int_0^1 \vec{v}(F(s, t)) \cdot (F_s \times F_t) \, ds \, dt$$

Aufgabe 4: Es geht um die Frage, ob es eine zweimal stetig differenzierbare Funktion $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ in zwei Variablen x und y gibt, deren Ableitungen F_x und F_y eine bestimmte vorgegebene Gestalt haben. Dabei spielt der Schwarzsche Vertauschbarkeitssatz, wonach $F_{xy} = F_{yx}$ gilt, eine wichtige Rolle. Man erinnert sich in diesem Zusammenhang auch an die Schlagworte Stammfunktion einer Funktion in zwei Variablen, Potential, konservatives Vektorfeld, Gradientenfeld, Integrierbarkeitsbedingungen und an den Zusammenhang mit exakten Differentialgleichungen.

Für das konkret zu behandelnde Beispiel seien die beiden Funktionen $f_1, g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ durch $f_1(x, y) := 2x + y$ und $g(x, y) := y$ gegeben ($f_2: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ wird in Teilaufgabe B zu finden sein). Alle auftretenden Funktionen seien der Einfachheit halber als beliebig oft differenzierbar vorausgesetzt.

Teilaufgabe A: Begründen Sie, warum es kein F mit $F_x = f_1$ und $F_y = g$ gibt.

Gäbe es so ein F , so würde $1 = \frac{\partial f_1}{\partial y} = F_{xy} = F_{yx} = \frac{\partial g}{\partial x} = 0$ folgen, Widerspruch.

Teilaufgabe B: Modifizieren Sie f_1 möglichst geringfügig zu f_2 derart, dass es ein F gibt mit $F_x = f_2$ und $F_y = g$. (Noch müssen Sie F nicht finden, darum geht es erst in Teilaufgabe C.)

$f_2(x, y) = 2x$, dann gilt $\frac{\partial f_2}{\partial y} = 0 = \frac{\partial g}{\partial x}$.

Teilaufgabe C: Setzen Sie $f := f_2$ (siehe Teilaufgabe B) und beschreiben Sie *alle* Funktionen F mit $F_x = f$ und $F_y = g$. Ein Lösungsweg ist wie folgt skizziert:

Aus $F_x = f$ folgt $F(x, y) = \int f(x, y) dx + h(y) = x^2 + h(y)$

mit einer nur von y , nicht jedoch von x abhängigen Funktion $h = h(y)$. Wegen

$y = g(x, y) = F_y(x, y) = \dots h'(y)$

muss h folgende Gestalt haben:

$h(y) = \dots \int y dy + c_1 = \frac{y^2}{2} + c_1$

Somit sind die gesuchten F genau die Funktionen der Gestalt $F(x, y) = x^2 + \frac{y^2}{2} + c_1$

mit einer beliebigen additiven Konstanten $c_1 \in \mathbb{R}$.

Teilaufgabe D: Die Differentialgleichung (*) $2x + yy' = 0$ ist, wie man unschwer nachprüft (bzw. wie man aus den bisherigen Teilaufgaben erkennen kann), exakt. Damit lassen sich nach einer bekannten Methode implizite Gleichungen für die Lösungen von (*) ermitteln. Geben Sie die Gleichung für eine solche Lösung y an, die durch den Punkt $\mathbf{x} = (x, y)$ mit $x = 1$ und $y = 2$ geht, und skizzieren Sie die dadurch dargestellte Lösungskurve. (Zur Erinnerung: Eine exakte Differentialgleichung hat die Gestalt $F_x + F_y y' = 0$ mit einem geeigneten F . Die zugehörige implizite Darstellung der Lösung hat dann die Form $F(x, y) = c_1$ mit einem $c_1 \in \mathbb{R}$, das gegebenenfalls an Anfangsbedingungen anzupassen ist.)

Eine die Lösung $y = y(x)$ von (*) beschreibende implizite Gleichung für x und y lautet: $x^2 + \frac{y^2}{2} = 3$

Skizze der Lösungskurve:

