Mathematik 2 für Bauingenieure

Prüfung am 6.3.2020
Reinhard Winkler

Name (bitte ausfüllen):

Matrikelnummer (bitte ausfüllen):

Die mündlichen Prüfungen werden möglichst im Laufe der kommenden Woche, d.h. in der Zeit vom 9. bis 13.3. stattfinden. Bitte geben Sie an, welche Tage und Zeiten UNGÜNSTIG für Sie sind. (Je weniger ungünstige Zeiten Sie angeben, desto leichter ist Ihr Wunsch zu erfüllen.) Ich werde mich bemühen, bei der Einteilung auf Ihre Wünsche Rücksicht zu nehmen. Die Einteilung wird Ihnen möglichst noch heute, spätestens aber zwei Tage vor der mündlichen Prüfung per TISS-Nachricht bekannt gegeben.

UNGÜNSTIG sind für mich:

Wichtige Hinweise bevor Sie beginnen:

- Die Prüfung besteht aus vier Aufgaben 1, 2, 3, 4, untergliedert in jeweils vier Teilaufgaben A, B, C, D. Zu jeder Teilaufgabe wird maximal ein Punkt vergeben. Ab 8 von 16 möglichen Punkten dürfen Sie jedenfalls zur mündlichen Prüfung antreten.
- Die Arbeitszeit beträgt 90 Minuten.
- Wenn in der Angabe nicht ausdrücklich anders vermerkt, wird zu jeder Teilaufgabe der Punkt (oder Teile eines Punktes) ausschließlich für das vergeben, was Sie unmittelbar neben bzw. unterhalb der Angabe dieser Teilaufgabe niedergeschrieben haben (und nicht unterhalb der horizontalen Trennlinie zur nächsten Teilaufgabe). Drei Punkte ... symbolisieren, dass Sie Ihre Eintragung an dieser Stelle machen bzw. beginnen, ein kleiner Kreis ○, dass Sie Zutreffendes ankreuzen sollen.

  In den meisten Fällen sollte der jeweils vorgesehene Platz für die gesamte Lösung der Aufgabe inklusive Nebenrechnungen ausreichen. Es lohnt daher, wenn Sie sich, bevor Sie mit dem Schreiben beginnen, vergewissern, dass Sie Ihre Antwort entsprechend kurz fassen können. Sollten Sie längere Nebenrechnungen oder sonstige schriftliche Überlegungen durchführen wollen, stehen Ihnen dafür die beiden letzten Blätter dieses Heftes zur Verfügung. Was immer Sie auf den letzten beiden Blättern notieren, wird bei der Punkteauswertung ignoriert.
- Wenn Sie sich noch vor Ausführung der Details einen Überblick darüber verschaffen, was in den einzelnen Aufgaben und ihren Teilen zu tun ist, kann das hilfreich für eine kluge Zeiteinteilung sein.

Nur vom Prüfer auszufüllen:

Punkte für Aufgabe 1: Aufgabe 2: Aufgabe 3: Aufgabe 4: Summe:

Protokoll zur mündlichen Prüfung, sonstige Bemerkungen:

Gesamtnote:

Aufgabe 1: Bekanntlich nennt man eine Zahl λ Eigenwert einer $n \times n$-Matrix A, wenn es einen Vektor $\mathbf{x} \neq \mathbf{o}$ gibt mit $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$. Dies ist genau dann der Fall, wenn die Matrix $A - \lambda I$ (I bezeichnet die $n \times n$-Einheitsmatrix) singulär ist, wenn also λ eine Nullstelle der durch $p_A := \det(A - \lambda I)$ definierten Funktion p_A (charakteristisches Polynom von A) ist.

Außerdem spielen in dieser Aufgabe die algebraische Vielfachheit $a = a(A, \lambda)$ und die geometrische Vielfachheit $g = g(A, \lambda)$ einer Zahl λ als Eigenwert einer Matrix A eine wichtige Rolle. Ist λ kein Eigenwert von A, so setzen wir $a(A, \lambda) = g(A, \lambda) = 0$. All diese Notationen seien für diese Aufgabe festgehalten.

Teilaufgabe A: Definieren Sie die Zahlen $a = a(A, \lambda)$ und $g = g(A, \lambda)$ für vorgegebenes A und λ.

$a := \ldots$ Vielfachheit von λ als Nullstelle des Polynoms p_A

$g := \ldots$ $\dim E_\lambda$ mit $E_\lambda = \{\bar{x} : A\bar{x} = \lambda\bar{x}\}$

Teilaufgabe B: Für a und g aus Teilaufgabe A gilt stets $a, g \leq n$. Kennt man nur diese Einschränkung, so kämen für $n = 2$ a priori 9 verschiedene Möglichkeiten in Frage. Geben Sie an, welche davon tatsächlich auftreten können, wenn man sich auf den reellen Fall beschränkt. Tun Sie dies, indem Sie ankreuzen, sofern die nachfolgende Aussage zutrifft, wenn man für a und g entsprechend einsetzt. Trifft diese Aussage nicht zu, so streichen Sie die entsprechenden Werte.

Die Aussage „Es gibt eine reelle 2×2-Matrix und eine reelle Zahl λ mit $a = a(A, \lambda) = \ldots$ und $g = g(A, \lambda) = \ldots$" trifft zu für:

☒ $a = 2, g = 2$	☒ $a = 2, g = 1$	~~○ $a = 2, g = 0$~~
~~○ $a = 1, g = 2$~~	☒ $a = 1, g = 1$	~~○ $a = 1, g = 0$~~
~~○ $a = 0, g = 2$~~	~~○ $a = 0, g = 1$~~	☒ $a = 0, g = 0$

Teilaufgabe C: Bestimmen Sie $a(A, \lambda)$ und $g(A, \lambda)$ für die Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. (Hinweis: Unterscheiden Sie jene λ mit $a(A, \lambda), g(A, \lambda) > 0$, die also Eigenwerte sind, von den übrigen.)

$\det(A - \lambda I) = \det\begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 0 & 1-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)^2 \Rightarrow a(A,1) = 2$

$\operatorname{rg}(A - 1 \cdot I) = \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 1 \Rightarrow g(A,1) = 1$

$\forall \lambda \neq 1: \quad a(A,\lambda) = g(A,\lambda) = 0.$

Teilaufgabe D: Geben Sie eine 2×2-Matrix A an mit $a(A, \lambda) = g(A, \lambda) = 0$ für alle $\lambda \in \mathbb{R}$.

z.B. $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ($\hat{=}$ Drehung um $90° = \frac{\pi}{2}$)

Aufgabe 2: Gegeben ist die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} f_1(x,y) \\ f_2(x,y) \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x^2 - y^2 + 1 \\ 2xy \end{pmatrix},$$

in zwei Variablen. In dieser Aufgabe geht es zunächst um die Ableitung $f'_{\mathbf{x}_0} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ an einer Stelle $\mathbf{x}_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ sowie um damit zusammenhängende Fragen. In Teilaufgabe D werden auch Nullstellensuche und Newtonverfahren zur Sprache kommen.

Teilaufgabe A: Sei $\mathbf{x}_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$. Dann ist die Ableitung $f'_{\mathbf{x}_0} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ von f an dieser Stelle $\mathbf{x}_0$ eine lineare Funktion, hat daher eine Darstellung als 2×2-Matrix $A = A_{f,\mathbf{x}_0}$. Berechnen Sie diese Matrix. (Die Eintragungen hängen natürlich von x_0 und y_0 ab.)

$$\frac{\partial f_1}{\partial x} = 2x \quad \frac{\partial f_1}{\partial y} = -2y$$
$$\frac{\partial f_2}{\partial x} = 2y \quad \frac{\partial f_2}{\partial y} = 2x$$
$$\Rightarrow A = A_{f,\bar{x}_0} = 2\begin{pmatrix} x_0 & -y_0 \\ y_0 & x_0 \end{pmatrix}$$

Teilaufgabe B: Berechnen Sie die Determinante $\det A_{f,\mathbf{x}_0}$. Gibt es Punkte $\mathbf{x}_0$, für die diese Determinante $= 0$ ist? Wenn ja, für welche?

Die gesuchte Determinante hat für gegebenes $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^2$ den Wert

$\det A_{f,\mathbf{x}_0} = \ldots 4(x_0^2 + y_0^2)$ Diese Determinante

○ ist für alle $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^2$ von 0 verschieden. X ist 0, sofern für $\mathbf{x}_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ gilt: $x_0 = y_0 = 0$

Teilaufgabe C: An der Stelle $\mathbf{x}_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ist $\det A_{f,\mathbf{x}_0} \neq 0$. Deshalb gibt es eine Inverse $A^{-1}_{f,\mathbf{x}_0}$. Berechnen Sie diese Matrix $A^{-1}_{f,\mathbf{x}_0}$. (Hinweis: $A_{f,\mathbf{x}_0}$ beschreibt eine Drehstreckung.)

$$A_{f,\bar{x}_0} = A_{f,\binom{1}{1}} = 2\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \underbrace{2\sqrt{2}}_{\text{Streckung}} \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}}_{\text{Drehung um } 45^\circ} \Rightarrow A^{-1}_{f,\binom{1}{1}} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}}_{\text{Drehung um } -45^\circ} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Teilaufgabe D: Das Newtonverfahren dient bei der Suche nach Nullstellen einer Funktion $f : \mathbb{R}^m \supseteq D \to \mathbb{R}^m$. Man wählt einen geeigneten Startwert $\mathbf{x}_0$ und berechnet rekursiv $\mathbf{x}_{n+1}$ als Nullstelle der linearen Approximation von f an der Stelle $\mathbf{x}_n$. Bei der entsprechenden Rechnung ist u.a. ein lineares Gleichungssystem zu lösen, was der Anwendung der Inversen der Ableitung $f'_{\mathbf{x}_n}$ entspricht. Hat f eine Nullstelle in einem Punkt $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$, so ist unter geeigneten Voraussetzungen V1 und V2 an f und $\mathbf{x}$ gesichert, dass es eine Umgebung U von $\mathbf{x}$ gibt derart, dass für alle Startwerte $\mathbf{x}_0 \in U$ die Iterationsfolge gegen $\mathbf{x}$ konvergiert. Geben Sie erstens diese beiden Voraussetzungen V1 und V2 an und zweitens für das oben angegebene f eine Nullstelle $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$, für welche so ein U existiert.

V1: f ist stetig differenzierbar V2: … $f'_{\bar{x}_0}$ ist regulär, d.h. $\det A_{f,\bar{x}_0} \neq 0$.

Die gesuchte Nullstelle ist $\mathbf{x} := \ldots \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Aufgabe 3: In dieser Aufgabe geht es u.a. um das (1-dimensionale) Integral $I_1 := \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx$. Bemerkenswerterweise führt folgender Weg zum Ziel: Man berechnet zunächst das (nur scheinbar schwierigere) 2-dimensionale Integral $I_2 := \int_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy$ und führt dann I_1 auf I_2 zurück. Das Ergebnis ist u.a. nützlich in Hinblick auf die Normalverteilung.

Teilaufgabe A: Das Integral I_2 lässt sich mit Hilfe einer geeigneten 2-dimensionalen Variablensubstitution auf das eindimensionale Integral $I_1' = \int_0^{\infty} re^{-r^2}\,dr$ mit $I_2 = 2\pi I_1'$ zurückführen. Geben Sie so eine Variablensubstitution an und führen Sie die Rechnung, die $I_2 = 2\pi I_1'$ zeigt, durch.

$$I_2 = \int_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy = \left|\begin{matrix} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{matrix} \quad \begin{matrix} \frac{\partial x}{\partial r} = \cos\varphi & \frac{\partial x}{\partial \varphi} = -r\sin\varphi \\ \frac{\partial y}{\partial r} = \sin\varphi & \frac{\partial y}{\partial \varphi} = r\cos\varphi \end{matrix}, \det\begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{vmatrix} = r\right| =$$

$$= \int_0^{\infty}\int_0^{2\pi} r\cdot e^{-r^2}\,d\varphi\,dr = 2\pi\int_0^{\infty} re^{-r^2}\,dr = \ldots = 2\pi I_1'$$

Teilaufgabe B: Berechnen Sie das Integral I_1' aus Teilaufgabe A. (Hinweis: 1-dimensionale Variablensubstitution $r^2 = s$)

$$I_1' = \int_0^{\infty} re^{-r^2}\,dr = \left|\begin{matrix} r^2 = s \\ 2r\,dr = ds \end{matrix}\right| = \int_0^{\infty} e^{-s}\,\frac{ds}{2} = \frac{1}{2}\,e^{-s}\Big|_{s=\infty}^{s=0} = \frac{1}{2}$$

Teilaufgabe C: Mit Hilfe des Satzes von Fubini lässt sich nun die Beziehung $I_2 = I_1^2$ herleiten. Wie?

$$I_2 = \ldots \int_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\cdot e^{-y^2}\,dx\,dy =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx\,dy = \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx\right)\cdot\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2}\,dy\right) = I_1\cdot I_1 =$$

$$\ldots = I_1^2.$$

Teilaufgabe D: Aus den bisherigen Ergebnissen folgt $I_1^2 = I_2 = 2\pi I_1' = \pi$, also $I_1 = \sqrt{\pi}$. Schließen Sie daraus, dass die Funktion $\rho(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}} > 0$ (die Dichte der Standardnormalverteilung) tatsächlich die Dichte einer Wahrscheinlichkeitsverteilung, d.h. auf $\int_{\mathbb{R}} \rho(x)\,dx = 1$ normiert ist. (Hinweis: Wie in Teilaufgabe B führt auch hier eine Variablensubstitution zum Ziel, diesmal allerdings eine lineare.)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \rho(x)\,dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx = \left|\begin{matrix} x = \sqrt{2}\,y \\ dx = \sqrt{2}\,dy \end{matrix}\right| = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2}\sqrt{2}\,dy =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2}\,dy = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\,I_1 = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cdot\sqrt{\pi} = 1.$$

Aufgabe 4, Fortsetzung:

Teilaufgabe A: Die Zufallsgröße X_A möge die Anzahl der Teilchen zählen, die nach der ersten Zeiteinheit zerfallen sind. Wir stellen uns die Menge der Teilchen sehr groß vor. Der Zerfall eines einzelnen Teilchens sei aber so selten, dass während dieser Zeit im Mittel insgesamt nur wenige, nämlich $\lambda > 0$ Teilchen zerfallen. Was ist die (annähernde) Verteilung von X_A?

Die gesuchte Verteilung ist eine

○ Exponential- ○ Normal- ☒ Poisson- ○ Binomial- ○ Geometrische

Verteilung mit dem Parameter bzw. mit den Parametern .. λ.

Teilaufgabe B: Ähnlich wie Teilaufgabe A, nur wollen wir annehmen, dass der Zerfall eines einzelnen Teilchens innerhalb einer Zeiteinheit mit einer deutlich positiven Wahrscheinlichkeit $p > 0$ stattfindet. (Würde man das Zerfallen bzw. Nichtzerfallen eines Teilchens mit einer 0, 1-wertigen Zufallsgröße beschreiben, so hätte diese die Varianz $\mathbb{V} = p(1-p)^2 + (1-p)p^2 = p(1-p)$.) Wir betrachten ein Stück Materie, das aus einer sehr großen Anzahl N solcher Teilchen besteht. Die Zufallsgröße X_B möge die Anzahl jener Teilchen zählen, die nach einer Zeiteinheit zerfallen sind. Erwartungsgemäß werden das etwa $\mathbb{E}(X_B) = pN$ Teilchen sein, höchstwahrscheinlich aber nicht genau so viele. X_B wird um diesen Erwartungswert streuen, und zwar in sehr guter Annäherung nach einer der oben angegebenen Verteilungen. Nach welcher?

Die gesuchte Verteilung ist eine

○ Exponential- ☒ Normal- ○ Poisson- ○ Binomial- ○ Geometrische

Ebenfalls korrekt: Binomialverteilung mit p und $n=N$.

Verteilung mit dem Parameter bzw. mit den Parametern . $\mu = pN$, $\sigma^2 = p(1-p)N$.

Teilaufgabe C: Wir betrachten nun ein bestimmtes Teilchen, von dem bekannt sei, dass es mit Wahrscheinlichkeit p innerhalb einer Zeiteinheit zerfalle. Die Zufallsgröße X_C nehme als Wert die natürliche Zahl n an, wenn der Zerfall des Teilchens im n-ten Zeitintervall der Länge 1 stattfindet. Welche Verteilung hat X_C?

Die gesuchte Verteilung ist eine

○ Exponential- ○ Normal- ○ Poisson- ○ Binomial- ☒ Geometrische

Verteilung mit dem Parameter bzw. mit den Parametern .. p.

Teilaufgabe D: Ähnlich wie Teilaufgabe C, nur nehme die Zufallsgröße X_D als Wert den Zeitpunkt $t \geq 0$ an, zu dem das Teilchen zerfällt. Welche Verteilung hat X_D?

Die gesuchte Verteilung ist eine

☒ Exponential- ○ Normal- ○ Poisson- ○ Binomial- ○ Geometrische

Verteilung mit dem Parameter bzw. mit den Parametern .. $\lambda = \mathbb{E}(X_D)$.

Aufgabe 4, Anfang: Diese Aufgabe ist der Stochastik zuzuordnen. Zwar ist der Text der Angabe auf den ersten Blick lang, doch kann die Bearbeitung auf dem nächsten Blatt sehr rasch erfolgen, sobald man die Aufgabenstellung verstanden hat. Es geht darum, wichtige Verteilungen aus der Wahrscheinlichkeitstheorie richtig zuzuordnen. Nun zur genauen Beschreibung der Situation.

Nach allen wissenschaftlich verfügbaren empirischen Befunden verläuft der Zerfall radioaktiver Teilchen absolut zufällig, genauer: gedächtnislos. Das bedeutet, dass die Wahrscheinlichkeit, dass ein noch nicht zerfallenes Teilchen innerhalb einer bestimmten Zeitspanne zerfällt, unabhängig von jeglicher Vorgeschichte ist. Anders als Organismen unterliegen solche Teilchen also insbesondere keinem Alterungsprozess, der das Zerfallen bei fortgeschrittenem Alter wahrscheinlicher machen würde. Von der speziellen Art des Teilchens hängt lediglich ein einziger reeller Parameter $\lambda > 0$ ab, der sich als Tendenz zum Zerfallen deuten lässt: Je größer λ, desto schneller zerfallen Teilchen der vorliegenden Art im Mittel und desto kürzer die Halbwertszeit.

Diese Gedächtnislosigkeit hat bemerkenswerte Konsequenzen. Insbesondere müssen die Verteilungen einiger Zufallsgrößen, die sich in diesem Zusammenhang auf sehr natürliche Weise definieren lassen, von einem ganz bestimmten Typ sein. Zur Auswahl stehen die folgenden Typen von Verteilungen:

- **Exponentialverteilung** mit dem Parameter $\lambda > 0$. Dabei handelt es sich um eine stetige Verteilung mit einer Dichte ρ_λ mit $\rho_\lambda(x) = 0$ für $x < 0$ und $\rho_\lambda(x) = e^{-\lambda x}$ für $x \geq 0$.
- **Normalverteilung** mit Mittel $\mu \in \mathbb{R}$ und Varianz σ^2, $\sigma > 0$: Dabei handelt es sich um eine stetige Verteilung mit der Dichte $\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2}\sigma^2}$.
- **Poissonverteilung** mit dem Parameter (= Erwartungswert) λ: Dabei handelt es sich um eine diskrete Verteilung auf $\mathbb{N}$ mit $\mathbb{P}(n) = \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda}$.
- **Binomialverteilung** mit den Parametern p und n: Dabei handelt es sich um eine diskrete Verteilung auf $\{0, 1, \ldots, n\}$ mit $\mathbb{P}(k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k}$.
- **Geometrische Verteilung** mit dem Parameter $p \in [0, 1]$: Dabei handelt es sich um eine diskrete Verteilung auf $\mathbb{N}^+$ mit $\mathbb{P}(n) = (1-p)^{n-1} p$.

Auf dem nächsten Blatt sind diese Verteilungen richtig zuzuordnen und jeweils der bzw. die richtigen Parameterwert(e) anzugeben.