Mathematik 2 für Bau- und Umweltingenieurwesen

Prüfung am 21.6.2021
Reinhard Winkler

Name (bitte ausfüllen):

Matrikelnummer (bitte ausfüllen):

Wichtige Hinweise bevor Sie beginnen:

- Die Prüfung besteht aus vier Aufgaben 1, 2, 3, 4, untergliedert in jeweils drei Teilaufgaben A, B, C. Zu jeder Teilaufgabe wird maximal ein Punkt vergeben.
- Die Arbeitszeit beträgt 90 Minuten.
- Wenn in der Angabe nicht ausdrücklich anders vermerkt, wird zu jeder Teilaufgabe der Punkt (oder Teile eines Punktes) ausschließlich für das vergeben, was Sie unmittelbar neben bzw. unterhalb der Angabe dieser Teilaufgabe niedergeschrieben haben (und nicht unterhalb der horizontalen Trennlinie zur nächsten Teilaufgabe). Punkte ... symbolisieren, dass Sie Ihre Eintragung an dieser Stelle machen bzw. beginnen, ein kleiner Kreis ∘, dass Sie Zutreffendes ankreuzen sollen.

  In den meisten Fällen sollte der jeweils vorgesehene Platz für die Lösung der Aufgabe inklusive Nebenrechnungen ausreichen. Es lohnt daher, wenn Sie sich, bevor Sie mit dem Schreiben beginnen, vergewissern, dass Sie Ihre Antwort entsprechend kurz fassen können. Sollten Sie längere Nebenrechnungen oder sonstige schriftliche Überlegungen durchführen wollen, stehen Ihnen dafür die beiden letzten Blätter dieses Heftes zur Verfügung. Was immer Sie auf den letzten beiden Blättern notieren, wird bei der Punkteauswertung ignoriert.
- Wenn Sie sich noch vor Ausführung der Details einen Überblick darüber verschaffen, was in den einzelnen Aufgaben und ihren Teilen zu tun ist, kann das hilfreich für eine kluge Zeiteinteilung sein.

Nur vom Prüfer auszufüllen:

Punkte für Aufgabe 1: Aufgabe 2: Aufgabe 3: Aufgabe 4: Summe:

Sonstige Bemerkungen:

Gesamtnote:

Aufgabe 1: In dieser Aufgabe geht es um dreidimensionale Lineare Algebra. Dazu seien drei Vektoren im $\mathbb{R}^3$ gegeben:

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 6 \\ 12 \\ 9 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{c} = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

Teilaufgabe A: Die Vektoren $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ spannen in $\mathbb{R}^3$ ein Parallelepiped P auf, in Mengenschreibweise $P = \{s\mathbf{a} + t\mathbf{b} + u\mathbf{c} :\ 0 \leq s, t, u \leq 1\}$. Berechnen Sie das Volumen $V(P)$ von P.

Die Rechnung ...

Sarrus

$$\det(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}) = \det \begin{pmatrix} 6 & 3 & 4 \\ 12 & -1 & 8 \\ 9 & -2 & 6 \end{pmatrix} = 6(-1)\cdot 6 + 3\cdot 8\cdot 9 + 4\cdot 12\cdot(-2) - 9\cdot(-1)\cdot 4 - (-2)\cdot 8\cdot 6 - 6\cdot 12\cdot 3 =$$

$$= -36 + 216 - 96 + 36 + 96 - 216 = 0$$

zeigt $V(P) = \ldots 0 \ldots$

Teilaufgabe B: Welche der drei Vektoren $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ lassen sich als Linearkombination der beiden jeweils anderen schreiben? Gegebenenfalls ist eine solche Darstellung anzugeben.

☒ Der Vektor **a** lässt sich als Linearkombination von **b** und **c** darstellen, nämlich:

$\mathbf{a} = \ldots 0 \cdot \bar{b} + \frac{3}{2}\bar{c}$

○ Der Vektor **a** lässt sich nicht als Linearkombination von **b** und **c** darstellen.

○ Der Vektor **b** lässt sich als Linearkombination von **a** und **c** darstellen, nämlich:

$\mathbf{b} = \ldots\ldots$

☒ Der Vektor **b** lässt sich nicht als Linearkombination von **a** und **c** darstellen.

☒ Der Vektor **c** lässt sich als Linearkombination von **a** und **b** darstellen, nämlich:

$\mathbf{c} = \ldots \frac{2}{3}\bar{a} + 0\cdot\bar{b}$

○ Der Vektor **c** lässt sich nicht als Linearkombination von **a** und **b** darstellen.

Teilaufgabe C: Sei U der von **a**, **b** und **c** aufgespannte Unterraum von $\mathbb{R}^3$. Kreuzen Sie von den angegebenen Mengen jene an, welche eine Basis von U bilden.

○ $\{\}$	○ $\{\mathbf{a}\}$	○ $\{\mathbf{b}\}$	○ $\{\mathbf{c}\}$
☒ $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}\}$	○ $\{\mathbf{a}, \mathbf{c}\}$	☒ $\{\mathbf{b}, \mathbf{c}\}$	○ $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$

Aufgabe 2: In dieser Aufgabe geht es um Gradientenfelder und Extrema. Insbesondere spielen Paare (f, g) von Funktionen $f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ eine Rolle.

Teilaufgabe A: Angenommen f und g sind stetig differenzierbar (haben stetige partielle Ableitungen) auf ganz $\mathbb{R}^2$. Geben Sie ein leicht zu überprüfendes Kriterium dafür an, dass es eine Funktion $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gibt, für die das Paar (f, g) das Gradientenfeld von F (dem zugehörigen Potential) ist.

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial x}$$

Teilaufgabe B: Seien nun speziell $f(x, y) := 3x^2 + 2xy^2 + 2x$ und $g(x, y) := 2yx^2 - 2y$. Dann erfüllt, wie man schnell nachrechnet (was Sie hier aber nicht tun müssen), das Paar (f, g) das Kriterium aus Teilaufgabe A. Also gibt es dazu ein Potential F. Finden Sie ein solches.

Die Rechnung ... $F(x,y) = \int f(x,y)\,dx + c(y) = \int 3x^2+2xy^2+2x\,dx + c(y) = x^3 + x^2y^2 + x^2 + c(y)$

$\Rightarrow 2yx^2 - 2y = g(x,y) = \frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = 2x^2y + c'(y) \quad \Rightarrow c'(y) = -2y$

$\Rightarrow c(y) = \int -2y\,dy + c = -y^2 + c$, setze $c = 0$ $\Rightarrow F(x,y) = x^3 + x^2y^2 + x^2 - y^2$

zeigt, dass ein Potential F für das Gradientenfeld (f, g) gegeben ist durch

$F(x, y) =$ $x^3 + x^2y^2 + x^2 - y^2$

Teilaufgabe C: Hat das Potential F, das Sie in Teilaufgabe B gefunden haben, im Koordinatenursprung $(0, 0)$ eine lokale Extremstelle? Wenn ja, Minimum oder Maximum? Begründen Sie Ihre Antwort.

Nebenrechnung (optional):

$$\left.\begin{aligned} F_{xx}(x,y) &= f_x(x,y) = 6x + 2y^2 + 2 \overset{x=y=0}{=} 2 \\ F_{xy}(x,y) &= f_y(x,y) = 4xy \overset{x=y=0}{=} 0 = F_{yx}(0,0) \\ F_{yy}(x,y) &= g_y(x,y) = 2x^2 - 2 \overset{x=y=0}{=} -2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

Hesse-Matrix von F in $(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ quadratische Form ist indefinit nach dem Hauptminorenkriterium

○ F hat in $(0, 0)$ eine lokale Extremstelle, nämlich ein ○ Minimum ○ Maximum,

weil ......

☒ F hat in $(0, 0)$ keine lokale Extremstelle,

weil ... die zugehörige quadratische Form indefinit ist.

Alternative Begründung (direkt): $\forall \varepsilon > 0$ hinreichend klein gilt

einerseits $F(\varepsilon, 0) = \varepsilon^3 + \varepsilon^2 = \varepsilon^2(\varepsilon + 1) > 0$

andererseits $F(0, \varepsilon) = -\varepsilon^2 < 0$

$F(0,0) = 0$

Aufgabe 3: Bekanntlich lässt sich die Einheitskugel K im $\mathbb{R}^3$ als Menge

$$K := \{(x, y, z): \; x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$$

darstellen. Durch Modifikation entsteht die Menge

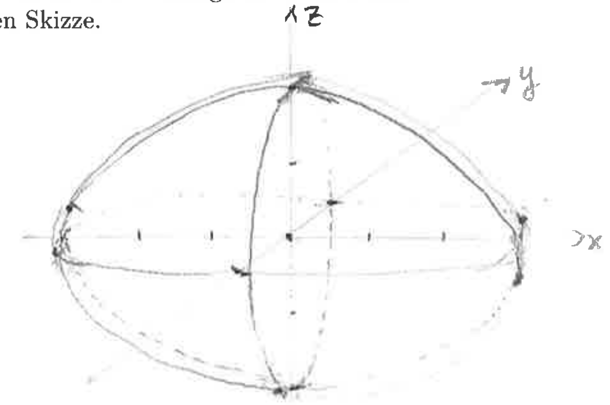
$$M := \{(x, y, z): \; \frac{x^2}{9} + y^2 + \frac{z^2}{4} \leq 1\},$$

um die es in dieser Aufgabe geht.

Teilaufgabe A: Beschreiben Sie die geometrische Gestalt der Menge M verbal und unterstützen Sie Ihre Beschreibung mit einer schematischen Skizze.

Ellipsoid mit Achsen in x-, y- u. z-Achse,
mit Durchmessern an den Achsen:

$$\left.\begin{array}{l} 2\cdot 3 = 6 \\ 2\cdot 1 = 2 \\ 2\cdot 2 = 4 \end{array}\right\} \text{auf der} \left\{\begin{array}{l} x- \\ y- \\ z- \end{array}\right. \text{Achse}$$



Teilaufgabe B: Definieren Sie eine (möglichst einfach gebaute) bijektive lineare Abbildung $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ derart, dass $M = T(K)$ gilt.

T ist gegeben durch:

$$T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad \begin{pmatrix} s \\ t \\ u \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x(s,t,u) \\ y(s,t,u) \\ z(s,t,u) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3s \\ t \\ 2u \end{pmatrix}$$

Teilaufgabe C: Bekanntlich ist das Volumen $V(K)$ der Einheitskugel gegeben durch $V(K) = \frac{4}{3}\pi$. Verwenden Sie diese Tatsache sowie die Abbildung T aus Teilaufgabe B, um mit Hilfe der Substitutionsregel das Volumen $V(M)$ von M zu ermitteln. Wenn Sie geschickt argumentieren, können Sie auf lange Rechnungen verzichten.

Raum für Nebenrechnungen und andere Überlegungen:

$$T'_{(s,t,u)} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ für alle } s,t,u \Rightarrow \det T' = 3\cdot 1\cdot 2 = 6 \text{ konstant}$$

$$\Rightarrow V(M) = \det T' \cdot V(K) = 6 \cdot \frac{4}{3}\pi = 8\pi.$$

Das Enderergebnis lautet also $V(M) = 8\pi$

Aufgabe 4: In dieser Aufgabe geht es um Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitstheorie, angewendet auf ein einfaches Beispiel.

Den Wurf von zwei fairen Würfeln modellieren wir mit dem diskreten Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{W})$. Dabei ist $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}^2$ die Menge aller Paare $\omega = (a,b)$ möglicher Augenzahlen, also $1 \le a,b \le 6$ und $|\Omega| = 36$. $\mathcal{A}$ besteht aus sämtlichen Teilmengen von Ω. $\mathbb{W}$ schließlich ist die diskrete Gleichverteilung auf Ω, die also jedem Element $\omega \in \Omega$ die Wahrscheinlichkeit $\mathbb{W}(\omega) = \frac{1}{36}$ zuordnet.

Auf diesem Wahrscheinlichkeitsraum sei die Zufallsgröße X definiert durch

$$X(\omega) = X((a,b)) := |a-b| \quad \text{(Betrag der Differenz der Augenzahlen der beiden Würfel).}$$

Offenbar nimmt X die Werte $0,1,2,3,4,5$ an. Gesucht sind Verteilung $\mathbb{W}_X$, Erwartungswert $\mathbb{E}(X)$ und Varianz $\mathbb{V}(X)$ von X.

Teilaufgabe A: Bestimmen Sie die Verteilung von X, indem Sie folgende Werte als Brüche angeben:

$\mathbb{W}(X=0) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$ $\qquad \mathbb{W}(X=1) = \frac{10}{36} = \frac{5}{18}$ $\qquad \mathbb{W}(X=2) = \frac{8}{36} = \frac{2}{9}$

$\mathbb{W}(X=3) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$ $\qquad \mathbb{W}(X=4) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$ $\qquad \mathbb{W}(X=5) = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$

Teilaufgabe B: Berechnen Sie den Erwartungswert von X.

Die Rechnung ...

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{i=0}^{5} p_i x_i = \frac{1}{36}\left(6\cdot 0 + 10\cdot 1 + 8\cdot 2 + 6\cdot 3 + 4\cdot 4 + 2\cdot 5\right) = $$

$$= \frac{1}{36}\left(10+16+18+16+10\right) = \frac{70}{36} = \frac{35}{18}$$

mit $p_i = \mathbb{W}(X=i)$, $x_i = i$

$i = 0,1,2,3,4,5$

zeigt: $\mathbb{E}(X) = \frac{35}{18}$

Teilaufgabe C: Geben Sie die Varianz $\mathbb{V}(X)$ von X an. Es genügt, wenn Sie diese als Formel mit sechs Summanden anschreiben, entsprechend der allgemeinen Definition der Varianz einer Zufallsgröße. Außerdem dürfen Sie die Abkürzung $\mu := \mathbb{E}(X)$ verwenden, ohne den Zahlenwert aus Teilaufgabe B einzusetzen. Abgesehen von diesem sollen aber alle Zahlenwerte explizit (und nicht als Variable) aufscheinen.

$$\mathbb{V}(X) = \sum_{i=0}^{5} p_i (x_i - \mu)^2 = \frac{1}{36}\left(6\mu^2 + 10(1-\mu)^2 + 8(2-\mu)^2 + 6(3-\mu)^2 + 4\cdot(4-\mu)^2 + 2\cdot(5-\mu)^2\right)$$

(Bezeichnungen wie in Teilaufgabe B)

Raum für Nebenrechnungen und sonstige Notizen, die bei der Beurteilung ignoriert werden.