Algebra, Prüfung am 29.6.2012, Winkler

Name, Matrikelnummer (bitte ausfüllen):

Ort und Zeit der mündlichen Prüfung werden über TISS bekanntgegeben.

Hinweise bevor Sie beginnen:
1. Die einzelnen Teilfragen haben ungefähr gleiches Gewicht.
2. Ihre Arbeitszeit beträgt 100 Minuten.

(1) Wir betrachten jene Varietät $\mathbb{V}$ von Algebren (A, f, g) des Typs $(1, 1)$, die durch das Gesetz $f(g(x)) = g(f(x))$ definiert ist.
  (a) Für welche Paare $(a, b) \in \mathbb{N}^2$ liegt die Algebra $(\mathbb{N}, f, g)$ in der Varietät $\mathbb{V}$, wenn $f : n \mapsto n + a$ und $g : n \mapsto n + b$?
  (b) Wie (a), nur mit $f : n \mapsto n + a$ und $g : n \mapsto bn$.
  (c) Geben Sie ein möglichst kleines Erzeugendensystem $E \subseteq \mathbb{N}$ von $(\mathbb{N}, f, g)$ mit $f : n \mapsto n + 4$ und $g : n \mapsto n + 6$ an.
  (d) Geben Sie eine Algebra (A, f, g) aus $\mathbb{V}$ an, die von einem Element frei erzeugt wird.
  (e) Geben Sie eine Algebra (A, f, g) aus $\mathbb{V}$ an, die von einem Element erzeugt wird, aber nicht frei.
  (f) Zeigen Sie, dass die Algebra $(\mathbb{N}, f, g)$ mit $f : n \mapsto 2n$ und $g : n \mapsto 3n$ kein endliches Erzeugendensystem besitzt.

(2) In der Theorie der faktoriellen Ringe spielt der Teilerkettensatz für Elemente wie auch für Ideale eine wichtige Rolle. Zur Präzisierung vereinbaren wir folgende Sprechweisen: Ein Integritätsbereich R erfülle ACC (Ascending Chain Condition) für Ideale, wenn in R jede aufsteigende Folge von Idealen $I_0 \subseteq I_1 \subseteq I_2 \subseteq \ldots$ ab einem gewissen n_0 konstant ist. Entsprechend erfülle R die DCC (Descending Chain Condition) für Elemente, wenn es für jede Folge von Elementen $a_n \in R$, in der die Teilerbeziehung $a_{n+1} | a_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt, ein n_0 gibt derart, dass alle a_n mit $n \geq n_0$ zu a_{n_0} assoziiert sind. In Hauptidealringen sind diese beiden Bedingungen offenbar äquivalent.

Sei nun K ein Körper und $R = K[X]$ der Ring aller Polynome in den Variablen $x \in X$, wobei X eine unendliche Menge von Variablen sei. Jedes Element aus $K[X]$ besitzt eine Darstellung als endliche formale Summe von Ausdrücken der Gestalt $a \cdot \prod_{i=1}^{n} x_i^{e_i}$ mit $a \in K$, $n \in \mathbb{N}$ und $x_i \in X$, mit denen auf die übliche Weise gerechnet wird. Lassen wir nur den Faktor $a = 1$ zu, so erhalten wir typische Elemente von $F = F_X$, der von X frei erzeugten Algebra innerhalb der Varietät aller kommutativen Ringe mit 1. Auch Elemente $a \in K$ lassen sich als Elemente von $K[X]$ deuten, indem man $e_i = 0$ setzt. Mit $\iota_F : F \to K[X]$ und $\iota_K : K \to K[X]$ bezeichnen wir die entsprechenden Inklusionsabbildungen. Man beachte, dass sich $K[X]$ als die Vereinigung aller $K[x_1, \ldots, x_n]$ mit $n \in \mathbb{N}$ und $x_i \in X$ auffassen lässt.
  (a) $(K[X], \iota_K, \iota_F)$ ist ein Koprodukt innerhalb der Varietät aller kommutativen Ringe mit Einselement, symbolisch $K[X] = K \amalg F_X$. Was bedeutet diese Aussage explizit? (Definition des Koproduktes angewendet auf $K \subseteq K[X]$ und $F_X \subseteq K[X]$)
  (b) Beschreiben Sie die primen und irreduziblen Elemente in $K[X]$. (Sie dürfen sich auf die entsprechenden Begriffe für endliches $Y \subseteq X$ beziehen, ein Beweis ist nicht nötig.)
  (c) Erfüllt $K[X]$ die Bedingung ACC für Ideale? (Begründung)
  (d) Ist $K[X]$ faktoriell? (Begründung)
  (e) Erfüllt $K[X]$ die Bedingung DCC für Elemente? (Begründung)
  (f) Ist $K[X]$ ein Hauptidealring? (Begründung)
  (g) Ist $K[X]$ ein Euklidischer Ring? (Begründung)