Algebra, Prüfung am 28.9.2012, Winkler

Name, Matrikelnummer (bitte ausfüllen):

Zeit der mündlichen Prüfung (bitte ankreuzen):

○ Do 4.10., 15 Uhr (Treffpunkt Freihaus, grüner Turm, 5.Stock, beim Lift)

○ Ab 8.10., ich melde mich per e-mail an reinhard.winkler@tuwien.ac.at zwecks Terminvereinbarung.

Hinweise bevor Sie beginnen:

1. Die einzelnen Teilfragen haben ungefähr gleiches Gewicht.
2. Ihre Arbeitszeit beträgt 100 Minuten.
3. Vergessen Sie nicht auf die Rückseite der Angabe.

(1) Sei $K_5 = \mathbb{Z}/(5)$ der Primkörper mit 5 Elementen. Ein Polynom $f \in K_5[x]$ soll gemäß Aufgabe (a) für alle Teile fest bleiben.
- (a) Welches Polynom f aus der Menge $\{x+2, x^2+1, x^2+2, x^2+x+4, x^3+x-1\} \subseteq K[x]$ kann man auswählen derart, dass $K_{25} := K[x]/(f) \cong \mathrm{GF}(5^2)$ ein Körper mit 25 Elementen ist? Halten Sie dieses f im Folgenden fest.
- (b) Welche multiplikative Ordnung hat das Element $x + (f) \in K_{25}$?
- (c) Sei L irgendein Erweiterungskörper von K_5 und $f(\alpha) = 0$ mit $\alpha \in L$. Gibt es einen Monomorphismus $\varphi : K_{25} \to L$ mit $x + (f) \mapsto \alpha$? Wenn ja, beschreiben Sie diesen; wenn nein, begründen Sie dies.
- (d) Wie (c) jedoch mit $\varphi : x + (f) \mapsto \alpha + 1$.
- (e) Finden Sie in der Situation von (c) ein $\alpha' \neq \alpha, \alpha + 1$ in L, für welches es einen Monomorphismus $\varphi : K_{25} \to L$ mit $x + (f) \mapsto \alpha'$ gibt.
- (f) Sei nochmals α wie in (c). Bestimmen Sie das Minimalpolynom $m(x)$ von $\alpha + 1$ über K_5.

(2) In dieser Aufgabe soll mit Hilfe zahlreicher Anleitungen ein Beweis in mehreren Schritten geführt werden. Die Aufgabe ist so formuliert, dass die meisten Teile auch einzeln behandelt werden können. Zunächst zur Notation:

G bezeichne durchwegs eine beliebige Gruppe, e das neutrale Element und S_n die symmetrische Gruppe, also die Menge aller Permutationen der Menge $\{1, 2, \ldots, n\}$. Unter einer Permutation $\pi \in S_n$ vom Typ $t = [n_1, n_2, \ldots, n_k]$ mit $n_1 \geq n_2 \geq \ldots \geq n_k \geq 2$, $k \geq 0$, und $\sum_{i=1}^{k} n_i \leq n$ wollen wir eine solche verstehen, die sich als Produkt $\pi = \pi_1\pi_2 \ldots \pi_k$ paarweise elementfremder Zyklen π_i der Länge n_i darstellen lässt. Mit T_n sei die Menge aller in S_n auftretenden Typen bezeichnet, insbesondere also $T_4 = \{[4], [3], [2], [2, 2], [\,]\}$, mit $S_n(t)$ die Menge aller $\pi \in S_n$ vom Typ t und mit $A(G)$ die Automorphismengruppe einer Gruppe G (mit der Hintereinanderausführung von Automorphismen als Operation). Außerdem sei daran erinnert, dass der in einer Gruppe G von einem Element $g \in G$ induzierte innere Automorphismus $\varphi_g \in A(G)$ gegeben ist durch $\varphi_g : x \mapsto gxg^{-1}$. Schließlich sei die Abbildung $\Phi_G : G \to A(G)$ definiert durch $\Phi_G : g \mapsto \varphi_g$.

Der im Zuge dieser Aufgabe zu beweisende Satz lautet:
$\Phi_{S_4} : S_4 \to A(S_4)$ ist ein Gruppenisomorphismus.

(a) Zeigen Sie, dass Φ_G stets ein Gruppenhomomorphismus ist.

(b) Zeigen Sie, dass der Kern von Φ_G das Zentrum $Z(G)$ von G ist. (Definitionsgemäß besteht $Z(G)$ aus jenen $g \in G$ für die $gh = hg$ für alle $h \in G$ gilt.)

(c) Sei nun $G = S_n$, $n \geq 3$. Zu jedem $\pi \in S_n \setminus \{e\}$ gibt es ein a mit $\pi : a \mapsto b \neq a$. Wegen $n \geq 3$ gibt es ein $c \notin \{a, b\}$ und ein $\sigma \in S_n$ mit $\sigma : a \mapsto a, b \mapsto c$. Folgern Sie aus dieser Beobachtung und (b), dass Φ_{S_n} injektiv ist.

(d) Bestimmen Sie $|S_4(t)|$ für alle fünf Typen $t \in T_4$.

(e) Die Beziehung $\varphi_\sigma(\pi)(\sigma(a)) = \sigma\pi\sigma^{-1}(\sigma(a)) = \sigma(\pi(a))$ zeigt, dass ein Zyklus $\pi = (a_1 \ldots a_k) \in S_n$ durch φ_σ auf den Zyklus $(\sigma(a_1) \ldots \sigma(a_k)) \in S_n$ abgebildet wird. Weil φ_σ ein Homomorphismus ist, gilt Analoges für ein Produkt elementfremder Zyklen, als welches sich jedes $\pi \in S_n$ darstellen lässt. Folglich gilt $\varphi_\sigma(S_n(t)) = S_n(t)$ für alle $t \in T_n$ (Beobachtung 1).
Innerhalb S_4 bilden (wie man leicht nachprüfen kann), die Mengen $V = S_4([\,]) \cup S_4([2, 2])$ (Kleinsche Vierergruppe) und $A_4 = V \cup S_4([3])$ (alternierende Gruppe, bestehend aus allen geraden Permutationen) Untergruppen. Begründen Sie mittels Beobachtung 1, warum V und A_4 sogar Normalteiler von S_4 sind.

(f) S_4 besitzt außer den beiden trivalen Normalteilern $\{e\}$ und S_4 sowie V und A_4 aus (e) keine weiteren Normalteiler. Begründen Sie dies, indem Sie die laut dem Satz von Lagrange in Frage kommenden Ordnungen betrachten und (d) sowie Beobachtung 1 aus (e) verwenden.

(g) Für alle $t \in T_4$ gilt $\psi(S_4(t)) = S_4(t)$ sogar für beliebige $\psi \in A(S_4)$ (nicht nur für innerere Automorphismen), denn:
Automorphismen erhalten die Ordnung von Elementen. Die einzigen Elemente der Ordnung 4 sind jene vom Typ [4], also gilt $\psi(S_4(t)) = S_4(t)$ zunächst für $t = [4]$, analog für $t = [3]$ und $t = [\,]$. Unter den Elementen der Ordnung 2 bilden genau jene vom Typ $[2, 2]$ zusammen mit e die Untergruppe V, die gleichzeitig der einzige Normalteiler der Ordnung 4 ist. Führen Sie aus, warum deshalb $\psi(S_4(t)) = S_4(t)$ auch für $t = [2, 2]$ und $t = [2]$ gilt.

(h) Warum genügt es für den Beweis des Satzes Folgendes zu zeigen?: Zu jedem $\psi \in A(S_4)$ gibt es ein $\sigma \in S_4$ mit $\psi(\pi) = \varphi_\sigma(\pi)$ für alle π vom Typ [2].

(i) Um dies zu tun, gehen wir für $\psi \in A(S_4)$ folgendermaßen vor. Wegen (g) gilt $\psi : (12) \mapsto (ab), (13) \mapsto (cd)$ mit $a \neq b$ und $c \neq d$. Begründen Sie, warum $\{a, b\}$ und $\{c, d\}$ genau ein Element gemeinsam haben, dass also o.B.d.A. $\psi : (12) \mapsto (ab), (13) \mapsto (ac)$ mit paarweise verschiedenen a, b, c gilt. Anleitung: Homomorphiebedingung.

(j) Analoge Überlegungen wie in (i) zeigen $\psi : (14) \mapsto (ad)$, $(23) \mapsto (bc)$, $(24) \mapsto (bd)$, $(34) \mapsto (cd)$. Bringen Sie damit den Beweis, dass $\Phi_{S_4} : S_4 \to A(S_4)$ ein Isomorphismus ist, zu einem Abschluss. Anleitung: (h) verwenden.