Algebra, Prüfung am 23.11.2012, Winkler

Name, Matrikelnummer (bitte ausfüllen):

Mündliche Prüfung: Möglichst in Dreier- und/oder Vierergruppen, voraussichtlich ab 16.11. Bitte melden Sie sich für die Terminvereinbarung per e-mail an `reinhard.winkler@tuwien.ac.at`.

Hinweise bevor Sie beginnen:
1. Die einzelnen Teilfragen haben ungefähr gleiches Gewicht.
2. Ihre Arbeitszeit beträgt 100 Minuten.

1. Die Gruppe der Symmetrien eines regelmäßigen n-Ecks heißt Diedergruppe und wird mit D_n bezeichnet. Sie wird erzeugt von einer Drehung a und einer Spiegelung b. Formal lässt sich D_n als Permutationsgruppe auf der Menge der Eckpunkte auffassen. Entsprechend definieren wir:

   D_n, $n \in \mathbb{N}$, ist jene Untergruppe der symmetrischen Gruppe S_n, die von den beiden Elementen $a = (123\dots n)$ (Zyklus, Drehung) und b, dem Produkt aller Transpositionen (ij) mit $2 \leq i < j \leq n$ und $i + j = n + 2$ (Spiegelung mit Fixpunkt 1), erzeugt wird.

   (a) Begründen Sie, warum b die Ordnung 2 hat.

   (b) Verifizieren Sie die Formel $ba = a^{n-1}b$.

   (c) Zeigen Sie, dass sich jedes Element von D_n in der Form a^k oder $a^k b$ darstellen lässt.

   (d) Wie viele Elemente hat D_n? (Unterscheiden Sie die vier Fälle $n = 0, 1, 2, \geq 3$.)

   (e) Zeigen Sie, dass D_n für $n \geq 3$ nicht abelsch ist.

   (f) Finden Sie einen abelschen Normalteiler N von D_n, für den D_n/N abelsch ist.

   (g) Für welche n ist D_n einfach? (Begründung!)

2. Wir betrachten den Ring $\mathbb{Z}[i] = \{a + ib : \ a, b \in \mathbb{Z}\}$ der Gaußschen Zahlen, den kleinsten Unterring von $\mathbb{C}$, der sowohl $\mathbb{Z}$ als auch die imaginäre Einheit i enthält. In den Übungen wurde gezeigt, dass $H : \mathbb{Z}[i] \to \mathbb{N}$, $H(z) := |z|^2$ eine euklidische Bewertung auf $\mathbb{Z}[i]$ und außerdem multiplikativ ist, d.h. $H(z_1 z_2) = H(z_1)H(z_2)$ erfüllt. Weiters bezeichne M die Menge aller $z = a + ib \in \mathbb{Z}[i]$ mit $H(z) \leq 10$, $M_+ := \{z = a + ib \in M : \ a, b \geq 0\}$.

   (a) Tragen Sie alle Elemente von M_+ in einer Skizze der komplexen Zahlenebene ein und bestimmen Sie die Anzahlen $|M_+|$ und $|M|$.

   (b) Assoziiertenklassen C lassen sich in der Form vE mit einem Vertreter v und der Einheitengruppe E schreiben. Zehn solche Assoziiertenklassen C_j, $j = 1, 2, \dots, 10$, sind in M enthalten. Geben Sie E und zehn Vertreter $v_j \in C_j$ an.

   (c) Begründen Sie: Ist $H(z)$ eine Primzahl, so ist z irreduzibel in $\mathbb{Z}[i]$.

   (d) Ist die Zahl 2 in $\mathbb{Z}[i]$ reduzibel oder irreduzibel?

   (e) Welche der $v_j \in C_j$ aus (b) sind irreduzibel?

   (f) Welche davon sind prim? (Begründung!)

   (g) Überprüfen Sie direkt anhand der Definition einer algebraischen Erweiterung, ob der Körper $Q[i] = \{a + ib : \ a, b \in \mathbb{Q}\}$ algebraisch über $\mathbb{Q}$ ist.