Algebra, Prüfung am 2.10.2015, Winkler

Name, Matrikelnummer (bitte ausfüllen):

Die **mündlichen Prüfungen** werden möglichst bald nach Korrektur der schriftlichen stattfinden; frühestens ab Mi, dem 7.10., nachmittags, spätestens am Fr, dem 16.10., und vorzugsweise in Kleingruppen zu jeweils 2-4 Kandidatinnen bzw. Kandidaten. Wenn gewisse Zeiten innerhalb dieses Rahmens für Sie ungünstig sind, können Sie diese hier angeben. Die Einteilung wird Ihnen spätestens am Di, dem 6.10., per TISS mitgeteilt werden.

Ungünstige Zeiten:

Hinweise bevor Sie beginnen:
Die einzelnen Teilfragen haben ungefähr gleiches Gewicht.
Ihre Arbeitszeit beträgt 100 Minuten.
Vergessen Sie nicht auf die Rückseite der Angabe.

1. In dieser Aufgabe sei P der Primkörper mit den drei Elementen 0 (Nullelement), 1 (Einselement) und $2 = -1$. Für ein Polynom $f \in P[x]$ bezeichne $(f) = \{f \cdot p : \ p \in P[x]\}$ das von f erzeugte Hauptideal.

   (a) Geben Sie sämtliche normierten Polynome $f \in P[x]$ vom Grad $n = 2$ an. Kennzeichnen Sie die irreduziblen und zerlegen Sie die reduziblen in irreduzible Faktoren.

   (b) Sind die Ringe $R_f := P[x]/(f)$ und $R_g := P[x]/(g)$ isomorph, wenn $f(x) = x$ und $g(x) = x + 1$? Begründen Sie Ihre Antwort.

   (c) Wie (b) mit $f(x) = x + 1$ und $g(x) = x^2 + 1$.

   (d) Wie (b) mit $f(x) = x^2 + 1$ und $g(x) = x^2 + x + 2$.

   (e) Wie (b) mit $f(x) = x^2 + 1$ und $g(x) = x^2 + 2x + 1$.

   (f) Geben Sie ein normiertes, irreduzibles Polynom $f \in P[x]$ vom Grad 3 an.

   (g) Sei Z ein Zerfällungskörper der Menge sämtlicher Polynome aus $P[x]$ vom Grad ≤ 3. Wieviele Elemente hat Z?

   (h) Geben Sie Polynome $f, g \in P[x]$ vom Grad ≥ 2 an mit $Z \cong (P[x]/(f))[x]/(g)$. (Hierbei ist P in kanonischer Weise, d.h. vermittels der Einbettung $a \mapsto a + (f)$ als Teilmenge von $P[x]/(f)$ aufzufassen und folglich g auch als Polynom über $P[x]/(f)$.)

   (i) Sei K ein Körper mit 9 Elementen mit Primkörper P und $\alpha \in K \setminus P$ mit $\alpha^4 \neq 1$. Für welche $i = 0, 1, \ldots, 7$ ist $\alpha^i \in P$?

   (j) Sei α wie in (i). Begründen Sie, warum eine der beiden Beziehungen $\alpha^2 + \alpha + 2 = 0$ oder $\alpha^2 + 2\alpha + 2 = 0$ gelten muss. Hinweis: Verwenden Sie (a).

2. Wie üblich sei $\mathbb{N}^+ := \{1, 2, \ldots\}$. Wir betrachten auf der Menge S_∞ aller bijektiven Abbildungen $\pi : \mathbb{N}^+ \to \mathbb{N}^+$ die binäre (2-stellige) Operation $\circ : (\pi, \sigma) \mapsto \pi \circ \sigma$ mit $\pi \circ \sigma(a) := \pi(\sigma(a))$ (Komposition von Abbildungen), die unäre (1-stellige) Operation $.^{-1} : \pi \mapsto \pi^{-1}$ mit $\pi^{-1}(a) = b$ für alle $a, b \in \mathbb{N}^+$, die $\pi(b) = a$ erfüllen, und eine 0-stellige Operation, deren konstanter Wert die identische Abbildung $\varepsilon : a \mapsto a$ ist. Wie üblich verwenden wir ε auch als Symbol für diese 0-stellige Operation. Diese Aufgabe beschäftigt sich mit der Algebra $\mathfrak{S}_\infty := (S_\infty, \circ, \varepsilon, .^{-1})$, wobei wir dafür oft einfacher S_∞ schreiben.

   Für paarweise verschiedene $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{N}^+$ sei mit der Zyklenschreibweise $(a_1 a_2 \ldots a_n)$ (ein sogenannter n-Zyklus) jenes $\pi \in S_\infty$ bezeichnet, das $\pi(a_i) = a_{i+1}$ für $i = 1, \ldots, n-1$, $\pi(a_n) = \pi(a_1)$ und $\pi(a) = a$ für alle übrigen $a \in \mathbb{N}^+$ erfüllt. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ bezeichnen wir mit S_n die Menge aller $\pi \in S_\infty$ mit $\pi(a) = a$ für alle $a > n$.

   (a) Begründen Sie anhand der Definition des Begriffs *Gruppe*, warum S_∞ eine Gruppe ist.

   (b) Begründen Sie anhand der Definition des Begriffs *Unteralgebra*, warum alle S_n Unteralgebren von S_∞ sind.

   (c) Geben Sie eine Unteralgebra U von S_∞ an mit $U \neq S_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

   (d) Zeigen Sie anhand der Definition des Begriffs *Automorphismus*, dass für eine beliebige Gruppe G und jedes $g \in G$ die Abbildung $\varphi_g : G \to G$, $x \mapsto gxg^{-1}$, ein Automorphismus ist (ein sogenannter innerer Automorphismus, die sogenannte Konjugation mit g).

   (e) In (d) sei $G = S_\infty$, außerdem $\pi = (a_1 a_2 \ldots a_n) \in S_\infty$ ein n-Zyklus und $\sigma \in S_\infty$ beliebig. Dann ist auch $\varphi_\sigma(\pi)$ ein n-Zyklus. Geben Sie diesen an. Hinweis: Werten Sie $\varphi_\sigma(\pi)$ an den Stellen $\sigma(a_i)$ aus.

   (f) Ist S_7 ein Normalteiler von S_8? (Begründung)

   (g) Ist die Vereinigung aller S_n ein Normalteiler von S_∞? (Begründung)

   (h) Beschreiben Sie ein Element $\pi \in S_\infty$, das in keinem S_n mit $n \in \mathbb{N}$ liegt.

   (i) Für jedes $i = 1, 2, 3, 4$ ist ein Gesetz γ_i (in der Sprache der Gruppen) anzugeben, das in S_i gilt, aber nicht in S_{i+1}.

   (j) Gibt es ein Gesetz, das in S_∞ gilt aber nicht in allen Gruppen? Wenn ja, geben Sie so ein Gesetz an; wenn nein, begründen Sie dies. (Hinweis: Verwenden Sie den Darstellungssatz von Cayley: Jede Gruppe ist isomorph zu einer Permutationsgruppe auf ihrer Trägermenge.)