**Algebra, Prüfung am 27.11.2015, Winkler**

Name, Matrikelnummer (bitte ausfüllen):

Die **mündlichen Prüfungen** werden möglichst bald nach Korrektur der schriftlichen stattfinden. Zwecks persönlicher Terminvereinbarung finden Sie sich bitte unmittelbar nach Ende der schriftlichen Prüfung im Bereich vor dem Eingang zu diesem Hörsaal ein.

Hinweise bevor Sie beginnen:
Die einzelnen Teilfragen haben ungefähr gleiches Gewicht.
Ihre Arbeitszeit beträgt 100 Minuten.
Vergessen Sie nicht auf die Rückseite der Angabe.

1. Wir schreiben $(a)$ für das in einem kommutativen Ring $R$ mit 1 von einem Element $a \in R$ erzeugte Ideal $(a) = Ra = \{ra : r \in R\}$. Außerdem bezeichne $P = \mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$ den Restklassenkörper modulo 7 und $K$ einen Körper mit $7^2 = 49$ Elementen, der $P \leq K$ als Primkörper enthält.

   (a) Wieviele normierte (=monische, d.h. mit führendem Koeffizienten 1) Polynome vom Grad 0, vom Grad 1 und vom Grad 2 enthält $P[x]$?

   (b) Geben Sie ein Polynom $f \in P[x]$ an mit $P[x]/(f) \cong K$.

   (c) Welche additiven Ordnungen $n$ von Elementen in $P$ kommen vor und wieviele Elemente gibt es zu jeder dieser Ordnungen?

   (d) Welche additiven Ordnungen $n$ von Elementen in $K$ kommen vor und wieviele Elemente gibt es zu jeder dieser Ordnungen?

   (e) Welche multiplikativen Ordnungen $n$ von Elementen in $P \setminus \{0\}$ kommen vor und wieviele Elemente gibt es zu jeder dieser Ordnungen?

   (f) Welche multiplikativen Ordnungen $n$ von Elementen in $K \setminus \{0\}$ kommen vor?

   (g) Wieviele Elemente gibt es zu jeder der von Ihnen unter (f) angegebenen Ordnungen?

   (h) Geben Sie ein Polynom $g \in P[x]$ vom Grad 3 an, das in $K$ keine Nullstelle hat.

   (i) Was ist die minimale Kardinalität $|Z|$ eines Erweiterungskörpers $Z$ von $K$, in dem Ihr Polynom $g$ aus (h) eine Nullstelle hat?

   (j) Beschreiben Sie die Menge $M \subseteq \mathbb{N}$ aller Kardinalitäten $|E|$ endlicher Erweiterungskörper $E$ von $P$, in denen Ihr Polynom $g$ aus (h) eine Nullstelle hat.

2. Wir bezeichnen mit $F = F(x, y) = F(X)$ die von der 2-elementigen Menge $X = \{x, y\}$ frei erzeugte Gruppe. Wie üblich schreiben wir ihre Elemente als reduzierte Gruppenwörter an. Neben dem leeren Wort (neutrales Element in $F$), das wir mit $\varepsilon$ bezeichnen, sind das formale Ausdrücke eines der folgenden vier Typen:
Typ 1: $w_1 = x^{k_1} y^{l_1} \dots x^{k_n} y^{l_n}$,
Typ 2: $w_2 = x^{k_1} y^{l_1} \dots x^{k_{n-1}} y^{l_{n-1}} x^{k_n}$,
Typ 3: $w_3 = y^{l_1} x^{k_1} \dots x^{k_{n-1}} y^{l_n}$ und
Typ 4: $w_4 = y^{l_1} x^{k_1} \dots x^{k_n}$,
jeweils mit $k_i, l_i \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ und $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

   (a) Sei $u = x^2 y^{-3} x^{-1} y^2, v = y^{-2} x^2 y^5$. Geben Sie die reduzierte Darstellung des Produktes $w = uv$ an.

   (b) Wie ist in $F$ die Inversenbildung definiert? Es genügt, wenn sie Typ 1 behandeln und das Inverse $w_1^{-1}$ des reduzierten Wortes $w_1$ beschreiben.

   (c) Geben Sie einen nichttrivialen Normalteiler $N$ in $F$ an, d.h. einen Normalteiler $N$ mit $\{\varepsilon\} \neq N \neq F$. (Hinweis: Vielleicht ist es Ihnen sympathischer, zuerst einen nichttrivialen, auf $F$ definierten Homomorphismus zu suchen und dann den Homomorphiesatz anzuwenden.)

   (d) Wie lautet die Definition für den Sachverhalt: *$F$ ist eine freie Gruppe über der zweielementigen Menge $X = \{x, y\}$*. (Spezialisierung des allgemeinen Begriffs einer freien Algebra über einer Menge in einer Klasse von Algebren auf die Klasse der Gruppen.)

   (e) Sei $G$ eine Gruppe, die von den beiden Elementen $a, b \in G$ erzeugt wird. Begründen Sie mit Hilfe von (d), dass $G$ ein homomorphes Bild von $F$ ist.

   (f) Bezeichne $C_2 = \{0, 1\}$ die zyklische Gruppe mit zwei Elementen und dem neutralen Element 0. Finden Sie einen surjektiven Homomorphismus $\varphi : F \to G$ auf die Gruppe $G = C_2 \times C_2$, indem Sie $\varphi(w)$ für ein beliebig vorgegebenes reduziertes Wort explizit angeben. (Hinweise: Es ist leicht möglich, alle vier Typen von Wörtern $w \neq \varepsilon$ in einem zu behandeln.)

   (g) Es gibt ein reduziertes Gruppenwort $w \in F$ mit folgender Eigenschaft: Für alle Normalteiler $N$ von $F$ ist die Faktorgruppe $F/N$ genau dann abelsch, wenn $w \in N$. Geben Sie ein $w$ mit dieser Eigenschaft an. Hinweis: Modulo $N$ müssen $xy$ und $yx$ dasselbe Element darstellen, und diese Bedingung ist auch hinreichend.

   (h) Ist $T \subseteq F$ irgendeine Teilmenge von $F$, so gibt es einen eindeutig bestimmten Normalteiler $N_T$ in $F$ mit der Eigenschaft, dass jeder beliebige Normalteiler $N$ von $F$ genau dann $T$ als Teilmenge enthält, wenn er $N_T$ umfasst. $N_T$ lässt sich erstens „von unten“ (ziemlich mühsam) und zweitens „von oben“ (hat mit der Vollständigkeit von Kongruenzverbänden zu tun) beschreiben. Geben Sie die Beschreibung „von oben“.

   (i) Geben Sie eine Gruppe $A$ und eine Abbildung $\iota : X = \{x, y\} \to A$ an, so dass $A$ in der Klasse der abelschen Gruppen frei über $(X, \iota)$ ist.

   (j) Sei $A$ wie in (i) mit $x, y \in A$ und $\iota$ auf $X = \{x, y\}$ die Identität. Aufgrund der universellen Eigenschaft von $F$ gibt es einen eindeutigen Homomorphismus $\psi : F \to A$, dessen Einschränkung auf die Menge $X \subseteq F \cap A$ die identische Abbildung ist. Beschreiben Sie den Kern $K$ von $\psi$, indem Sie ein $T \subseteq F$ angeben mit $K = N_T$ (Notation aus (h)).