Algebra, Prüfung am 22.1.2016, Winkler

Name, Matrikelnummer (bitte ausfüllen):

Die **mündlichen Prüfungen** werden möglichst bald nach Korrektur der schriftlichen stattfinden. Zwecks persönlicher Terminvereinbarung finden Sie sich bitte unmittelbar nach Ende der schriftlichen Prüfung im Bereich vor dem Eingang zu diesem Hörsaal ein.

Hinweise bevor Sie beginnen:
Die einzelnen Teilfragen haben ungefähr gleiches Gewicht.
Ihre Arbeitszeit beträgt 100 Minuten.
Vergessen Sie nicht auf die Rückseite der Angabe.

1. Wir betrachten das Monoid $M = (\mathbb{N}, +, 0)$ und untersuchen Unterstrukturen, Kongruenzrelationen auf M sowie die Anwendung eines Isomorphiesatzes darauf.

   (a) Bestimmen Sie die von den Teilmengen $\{2, 3\}$, $\{4, 6\}$ und $\{3, 5\}$ erzeugten Untermonoide $U_{2,3}$, $U_{4,6}$ und $U_{3,5}$ von M. (Hinweis: Wenn Sie Differenzmengen verwenden, ist der Schreibaufwand geringer; vgl. auch die Angabe zu (b).)

   (b) Die Menge $U := \mathbb{N} \setminus \{1, 2, 4, 5, 7, 8, 11\} = \{0, 3, 6, 9, 10, 12, 13, 14, 15, 16, \ldots\}$ bildet ein Untermonoid U von M. Gibt es ein zweielementiges Erzeugendensystem für U? Wenn ja, geben Sie ein solches an; wenn nein, begründen Sie Ihre Antwort.

   (c) Zu jeder beliebigen Menge $A \subseteq \mathbb{N}^2$ gibt es eine eindeutige $\subseteq$-minimale Kongruenzrelation $\sim_A$ auf M, so dass $a \sim_A b$ für alle $(a, b) \in A$ gilt. (Für eine beliebige Äquivalenzrelation $\sim$ ist $a \sim b$ wie üblich eine Kurzschreibweise für die weniger gebräuchliche Notation $(a, b) \in \sim$.) Schreiben Sie $\sim_A$ in geeigneter Weise als mengentheoretischen Durchschnitt in Abhängigkeit von A an, so dass die behaupteten Eigenschaften leicht erkennbar sind. (Diese Relation $\sim_A$ heißt die von A erzeugte Kongruenzrelation.)

   (d) In (c) sei $A = \{(3, 5)\}$. Die von A erzeugte Kongruenzrelation $\sim_A$ induziert fünf Kongruenzklassen K_0, K_1, K_2, K_3, K_4 mit $i \in K_i$. Geben Sie die K_i explizit an.

   (e) Geben Sie die Operationstafel des Faktormonoids $M/{\sim_A}$ mit $\sim_A$ aus (d) an.

   (f) Die Identität (Diagonale) $\Delta = \{(a, a) : a \in M\}$ ist eine Kongruenzrelation mit unendlichem Faktormonoid $M/\Delta \cong M$. Für alle von Δ verschiedenen Kongruenzrelationen $\sim$ auf M ist das Faktormonoid $M/{\sim}$ endlich. Geben Sie die optimale obere Schranke für die Kardinalität $m := |M/\sim|$ in Abhängigkeit von a und/oder b an, wenn $a \sim b$ und $a < b$ gilt.

   (g) Jede Kongruenzrelation $\sim$ auf M induziert auf jeder Unteralgebra U durch Einschränkung (d.h. durch mengentheoretischen Schnitt mit $U \times U$) eine Kongruenzrelation $\sim_U$ auf U. Einer der Isomorphiesätze behauptet die Isomorphie von $U/{\sim_U}$ zu einer anderen Algebra M', die sich in natürlicher Weise aus M, U und $\sim$ ergibt und deren Trägermenge aus gewissen $\sim$-Klassen $[a]_\sim$ besteht. Aus welchen?

   (h) Wählen Sie in (g) die Unteralgebra U aus (b), für $\sim$ die Kongruenzrelation $\sim_A$ aus (d) und (e), und geben Sie für den durch den Isomorphiesatz gemäß (g) garantierten Isomorphismus φ alle Bilder $\varphi(x)$, $x \in U/(\sim_A)_U$ (welche und wieviele solche x gibt es?), explizit an.

2. Wir betrachten die Körpererweiterung $K : \mathbb{Q}$ mit dem von der irrationalen Zahl $\sqrt{2}$ erzeugten Unterkörper $K := \mathbb{Q}(\sqrt{2})$ von $\mathbb{R}$, bestehend aus allen $z = a + b\sqrt{2}$ mit $a, b \in \mathbb{Q}$.

   Außerdem betrachten wir den Integritätsbereich $R := \mathbb{Z}[\sqrt{2}] = \{a + b\sqrt{2} : \ a, b \in \mathbb{Z}\} \subseteq K$ und darauf die sogenannte Normfunktion $N : R \to \mathbb{Z}$, definiert für $z = a + b\sqrt{2}$ mit $a, b \in \mathbb{Z}$ durch $N(a + b\sqrt{2}) := (a + b\sqrt{2})(a - b\sqrt{2}) = a^2 - 2b^2$.

   (a) Die Normfunktion N ist durch die obige Festsetzung wohldefiniert. Erklären Sie, was dies in diesem Zusammenhang bedeutet.

   (b) Begründen Sie die in (a) behauptete Wohldefiniertheit.

   (c) Prüfen Sie nach, dass R tatsächlich eine Unteralgebra von $(K, +, 0, -, \cdot, 1)$ ist. (Achtung: Die Gesetze eines Integritätsbereichs, die R direkt von $\mathbb{R}$ erbt, sind dabei NICHT zu behandeln.)

   (d) Zeigen Sie, dass die Normfunktion N ein Homomorphismus vom multiplikativen Monoid $(R, \cdot, 1)$ ins multiplikative Monoid $(\mathbb{Z}, \cdot, 1)$ ist. Sie dürfen und sollen dabei auch verwenden, dass $\varphi : K \to K$, $a + b\sqrt{2} \mapsto a - b\sqrt{2}$ $(a, b \in \mathbb{Q})$, ein Automorphismus von K ist (der einzige neben der Identität), und dass die Beziehung $N(z) = z\varphi(z)$ für alle $z \in R$ gilt.

   (e) Zeigen Sie, dass aus der Teilerbarkeitsbeziehung $a|b$ in R stets $N(a)|N(b)$ in $\mathbb{Z}$ folgt. Hinweis: Verwenden Sie (d).

   (f) Wie üblich bezeichne R^* die Menge der Einheiten in R. Für $e \in R^*$ gilt definitionsgemäß $e|1$ in R, nach (g) also $N(e)|N(1) = 1$ in $\mathbb{Z}$, folglich $N(e) = 1$ oder $N(e) = -1$. Begründen Sie mittels Fallunterscheidung, dass auch die Umkehrung gilt: Jedes Element $e \in R$ mit $N(e) \in \{1, -1\}$ ist eine Einheit.

   (g) Zeigen Sie, dass die Einheitengruppe R^* von R unendlich ist. Hinweis: Finden Sie eine Einheit $e \in R^*$, deren Potenzen e^n, $n \in \mathbb{N}$, alle verschieden sind.

   (h) Finden Sie ein irreduzibles Element in R und begründen Sie, warum es sich tatsächlich um ein solches handelt. Hinweis: Betrachten Sie $3 + \sqrt{2}$ und verwenden Sie (e) und (f).