Algebra, Prüfung am 21.6.2016, Winkler

Name, Matrikelnummer (bitte ausfüllen):

Vereinbarter Termin der **mündlichen Prüfung** (nicht vorzeitig ausfüllen!):

Die mündliche Prüfung findet im Prüfungs- und Besprechungsraum des Instituts 104 im Freihaus, grüner Bereich, 5.Stock statt.

Hinweise bevor Sie beginnen:
Die einzelnen Teilfragen haben ungefähr gleiches Gewicht.
Verwenden Sie für jede der vier Aufgaben ein eigenes Blatt. Bei Bedarf können Sie zusätzliche Blätter haben.
Ihre Arbeitszeit beträgt 100 Minuten.
Vergessen Sie nicht auf die Rückseite der Angabe.

1. Wir betrachten den Ring $R := \mathbb{Z}[\sqrt{-3}]$ aller komplexen Zahlen der Form $a + ib\sqrt{3}$ mit $a, b \in \mathbb{Z}$, $i^2 = -1$, und die sogenannte (wohldefinierte!) Normfunktion

$$N : R \to \mathbb{Z}, \quad a + ib\sqrt{3} \;\mapsto\; (a + ib\sqrt{3})(a - ib\sqrt{3}) = a^2 + 3b^2.$$

   (a) Bestimmen Sie alle Elemente der Einheitengruppe E von R. (Hinweis: Sie dürfen die leicht zu überprüfende Homomorphiebedingung $N(xy) = N(x)N(y)$ für die Multiplikation verwenden.)

   (b) Gilt in R die Teilerkettenbedingung? (Zur Erinnerung, die Teilerkettenbedingung lautet explizit: Wenn $r_{n+1}|r_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $r_n \in R$ gilt, dann gibt es einen Index $n_0 \in \mathbb{N}$, ab dem alle r_n assoziiert zueinander sind: $r_n \sim r_{n_0}$ für alle $n \geq n_0$.) Begründen Sie Ihre Antwort.

   (c) Ist $2 \in R$ ein Teiler von $1 + i\sqrt{3}$, von $1 - i\sqrt{3}$ und/oder von $(1 + i\sqrt{3})(1 - i\sqrt{3})$?

   (d) Ist R faktoriell, Hauptidealring, euklidisch? Begründen Sie Ihre Antwort. Hinweis: Zeigen Sie, dass 2 irreduzibel ist und verwenden Sie (c).

2. Wir betrachten das Polynom $f(x) = x^4 + 1$.

   (a) Geben Sie alle Nullstellen von f in $\mathbb{C}$ an.

   (b) Zerlegen Sie f in irreduzible Faktoren über $\mathbb{C}$, über $\mathbb{R}$ und über $\mathbb{Q}$.

   (c) Wählen Sie eine Nullstelle α von f. Bestimmen Sie die Dimensionen der Körpererweiterungen $\mathbb{C}(\alpha) : \mathbb{C}$, $\mathbb{R}(\alpha) : \mathbb{R}$ und $\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}$ und geben Sie jeweils das zugehörige Minimalpolynom von α an.

   (d) Geben Sie für α aus (c) je eine Basis von $\mathbb{C}(\alpha)$ über $\mathbb{C}$, von $\mathbb{R}(\alpha)$ über $\mathbb{R}$ und von $\mathbb{Q}(\alpha)$ über $\mathbb{Q}$ an.

3. Die von den Elementen (1234) und (13) (Zyklenschreibweise) erzeugte Untergruppe G der symmetrischen Gruppe S_4 hat die Ordnung 8. (Es kann die Intuition stützen, G als Symmetriegruppe eines Quadrats mit den Eckpunkten $1, 2, 3, 4$ zu interpretieren.) Als nichttriviale Untergruppen von G kommen daher nur Gruppen der Ordnungen 2 und 4 in Frage, die, wie man leicht zeigen kann, alle abelsch und nach dem Hauptsatz isomorph zu den zyklischen Gruppen C_2, C_4 oder zu $C_2 \times C_2$ sind.

   (a) Geben Sie alle Elemente von G in Zyklenschreibweise an.

   (b) Geben Sie, geordnet nach Isomorphietyp, alle Untergruppen von G durch ein minimales Erzeugendensystem an.

   (c) Geben Sie alle Normalteiler von G an.

   (d) Geben Sie aus jeder Isomorphieklasse der homomorphen Bilder von G jeweils genau einen Vertreter an.

4. C_n bezeichne die zyklische Gruppe mit n Elementen, aufgefasst als additive Restklassengruppe modulo n, d.h. als Faktorgruppe $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ der additiven Gruppe $\mathbb{Z}$. Die Elemente von C_n sind also Restklassen von der Form $k + n\mathbb{Z}$.

   (a) C_6 ist die innere direkte Summe gewisser nichttrivialer Untergruppen U_1 und U_2. D.h. es gibt einen Isomorphismus $\varphi : U_1 \times U_2 \to C_6$ mit $(u_1, u_2) \mapsto u_1 + u_2$. Wie können U_1 und U_2 gewählt werden?

   (b) Es gibt isomorphe Einbettungen $\iota_2 : C_2 \to C_6$ und $\iota_3 : C_3 \to C_6$, die unter der zusätzlichen Forderung $\iota_3 : 1 + 3\mathbb{Z} \mapsto 2 + 6\mathbb{Z}$ sogar eindeutig bestimmt sind. Geben Sie ι_2 und ι_3 explizit, d.h. durch eine Wertetabelle an.

   (c) C_6 zusammen mit ι_2 und ι_3 aus (b) erfüllen eine universelle Eigenschaft, die zeigt, dass ein Koprodukt innerhalb einer geeigneten Klasse $\mathcal{K}$ von Algebren vorliegt. Welche Klasse $\mathcal{K}$ kann man nehmen?

   (d) Formulieren Sie die universelle Eigenschaft aus (c) explizit.