Algebra, Prüfung am 7.10.2016, Winkler

Name, Matrikelnummer (bitte ausfüllen):

Mündlichen Prüfung: Zwecks Vereinbarung des Termins Ihrer mündliche Prüfung finden Sie sich bitte unmittelbar nach der schriftlichen Prüfung vor dem Hörsaal ein.

Hinweise bevor Sie beginnen:
Die einzelnen Teilfragen haben ungefähr gleiches Gewicht.
Verwenden Sie für jede der vier Aufgaben ein eigenes Blatt. Bei Bedarf können Sie zusätzliche Blätter haben.
Ihre Arbeitszeit beträgt 100 Minuten.
Vergessen Sie nicht auf die Rückseite der Angabe.

1. In dieser Aufgabe geht es um Gesetze in allgemeinen Algebren wie G_1: $(x+y)^2 \approx x^2+2xy+y^2$ und G_2: $(x+y)^2 \approx x^2+y^2$ (hier in den Variablen x, y). In Teil (a) ist eine Klasse $\mathcal{K}$ anzugeben, die auch in den nachfolgenden Teilen auftritt.

   (a) Geben Sie einen Typ τ von Algebren und eine (möglichst prominente und große) Klasse $\mathcal{K}$ von Algebren des Typs τ an, wo das Gesetz G_1 sinnvoll erklärt, aber nicht uneingeschränkt gültig ist (siehe auch Teil (b)). Spezifizieren Sie insbesondere die fundamentalen Operationen samt ihrer Stelligkeit und erklären Sie, wie die Terme auf den beiden Seiten von G_1 ausführlich, d.h. nur unter Verwendung der fundamentalen Operationen und Klammern, zu lesen sind. Geben Sie weiters eine prominente Teilklasse $\mathcal{K}_1 \subseteq \mathcal{K}$ an, wo das Gesetz G_1 gilt.

   (b) Geben Sie eine Algebra $\mathfrak{A} \in \mathcal{K}$ mit Trägermenge A und Elemente $a, b \in A$ an, so dass das Gesetz G_1 für $x = a$ und $y = b$ *nicht* gilt.

   (c) Geben Sie ein Gesetz G_3 für den Typ τ aus (a) an, das keine Variablen, also ausschließlich (0- und/oder mehrstellige) Operationssymbole enthält, so dass jede Algebra aus $\mathcal{K}_1$, in der G_3 gilt, auch G_2 erfüllt.

   (d) Geben Sie eine Algebra aus $\mathcal{K}$ an, in der G_2 nicht gilt, dafür aber das Gesetz G_4: $(x+y)^3 \approx x^3+y^3$.

2. Wir beschäftigen uns mit endlichen Körpern. Dabei bezeichne K_q stets einen Körper mit q Elementen.

   (a) Wieviele paarweise nicht isomorphe Körper K_q mit $q \leq 100$ gibt es? (Hinweis: Es gibt genau 25 Primzahlen p mit $p \leq 100$.)

   (b) Sei $K_4 = \{0, 1, a, b\}$. Geben Sie die Operationstafeln für $+$ und $\cdot$ sowie sämtliche additive wie auch multiplikative Inverse an.

   (c) Geben Sie sämtliche $q \leq 100$ an, für die K_q einen Unterkörper $\cong K_4$ hat.

   (d) Sei $K_{11} = \mathbb{Z}/(11 \cdot \mathbb{Z}) = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \ldots, \bar{10}\}$ in der üblichen Notation (Restklassen $k + 11 \cdot \mathbb{Z}$ modulo 11 durch $\bar{k}$ abgekürzt).
   Für wieviele Paare (α, β) $(\alpha, \beta \in K_{11})$ gilt $K_{121} \cong K_{11}[x]/(x^2+\alpha x+\beta)K_{11}[x]$?

3. In dieser Aufgabe spielt die Algebra $\mathfrak{N} := (\mathbb{N}, +, 0, \cdot, 1)$ vom Typ $(2, 0, 2, 0)$ eine wichtige Rolle.

   (a) Sei $\mathfrak{R} = (R, +_R, 0_R, -_R, \cdot_R, 1_R)$ ein kommutativer Ring mit Einselement 1_R. Ignoriert man die additive Inversenbildung $-_R$, so entsteht eine Algebra $\mathfrak{R}_0 := (R, +_R, 0_R, \cdot_R, 1_R)$ vom Typ $(2, 0, 2, 0)$. Es gibt genau einen Homomorphismus $f_{\mathfrak{R}}$ von $\mathfrak{N}$ nach $\mathfrak{R}_0$.

   Beschreiben Sie $f_{\mathfrak{R}}$ rekursiv, d.h. durch Angabe von $f_{\mathfrak{R}}(0)$ und einer Funktion $g : R \to R$ mit $f_{\mathfrak{R}}(n+1) = g(f_{\mathfrak{R}}(n))$ für jedes $n \in \mathbb{N}$.

   (b) Beschreiben Sie, für welche Teilmengen $T \subseteq \mathbb{N}$ es einen kommutativen Ring $\mathfrak{R}$ mit 1 gibt derart, dass $T = T_{\mathfrak{R}}$ mit $T_{\mathfrak{R}} := f_{\mathfrak{R}}^{(-1)}(0_R)$, dem Urbild des Nullelements 0_R unter dem Homomorphismus $f_{\mathfrak{R}}$ aus (a). Hinweis: Die auftretenden Mengen T lassen sich in natürlicher Weise als T_m mit $m \in \mathbb{N}$ schreiben.

   (c) Für welche der Teilmengen $T_{\mathfrak{R}}$ aus (b) ist das Bild $f_{\mathfrak{R}}(\mathbb{N}) \leq \mathfrak{R}$ stets eine Unteralgebra von $\mathfrak{R}$ als kommutativer Ring mit 1, für welche sogar ein Körper? Hinweis: Schreiben Sie $T_{\mathfrak{R}}$ als T_m gemäß (b) an.

   (d) Gibt es in der Kategorie der kommutativen Ringe mit Einselement (Morphismen und Komposition wie üblich) initiale und terminale Objekte? Wenn ja, geben Sie diese an; wenn nein, begründen Sie es.

4. Sei $\mathcal{V}$ die Varietät jener Algebren vom Typ $(1, 1)$ mit zugeordneten unären Operationssymbolen f und g, in denen die beiden Gesetze $fg(x) := f(g(x)) \approx g(f(x)) =: gf(x)$ und $g^{(3)}(x) := g(g(g(x))) \approx x$ gelten. Außerdem bezeichne $C_n = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ die zyklische Gruppe der Ordnung $n \geq 1$ mit den Elementen $\bar{k} := k + n\mathbb{Z}$. Für positive $m, n \in \mathbb{N}$ seien weiters die Algebren $\mathfrak{A}_{m,n} := (C_m \times C_n, f_{m,n}, g_{m,n})$ vom Typ $(1, 1)$ definiert durch $f_{m,n}(a, b) := (a + 1, b)$ und $g_{m,n}(a, b) := (a, b + 1)$.

   Für die Teilaufgaben (b), (c) und (d) unten genügt es jeweils, eine Trägermenge A, unäre Operationen $f_A, g_A : A \to A$ auf A für f und g sowie allfällige mit den jeweiligen Begriffen einhergehende Homomorphismen korrekt anzugeben. Die zusätzlichen definierenden Eigenschaften, die Ihre Algebra zu einer in $\mathcal{V}$ freien Algebra machen, müssen Sie nicht überprüfen.

   (a) Für welche Paare $(m, n) \in (\mathbb{N} \setminus \{0\})^2$ ist $\mathfrak{A}_{m,n} \in \mathcal{V}$?

   (b) Beschreiben Sie die von einem Element x in $\mathcal{V}$ frei erzeugte Algebra $\mathfrak{F}(x)$.

   (c) Beschreiben Sie die von zwei Elementen $x \neq y$ in $\mathcal{V}$ frei erzeugte Algebra $\mathfrak{F}(x, y)$.

   (d) Beschreiben Sie das Koprodukt $\mathfrak{F}(x) \coprod \mathfrak{F}(y)$ der beiden von x bzw. y in $\mathcal{V}$ frei erzeugten Algebren $\mathfrak{F}(x)$ und $\mathfrak{F}(y)$.