**Algebra, Prüfung am 2.12.2016, Winkler**

Name, Matrikelnummer (bitte ausfüllen):

Terminvereinbarung für die **mündliche Prüfung**: persönlich, unmittelbar nach der schriftlichen Prüfung im Bereich vor dem Hörsaal

Hinweise bevor Sie beginnen:
Die einzelnen Teilfragen haben ungefähr gleiches Gewicht.
Verwenden Sie für jede der vier Aufgaben ein eigenes Blatt. Bei Bedarf können Sie zusätzliche Blätter haben.
Ihre Arbeitszeit beträgt 100 Minuten.
Vergessen Sie nicht auf die Rückseite der Angabe.

1. Gegeben sei das Polynom $f(x) := x^8 - 1$ in $\mathbb{Q}[x]$ und ein Zerfällungskörper $Z$ von $f$ mit $\mathbb{Q} \leq Z \leq \mathbb{C}$.
   (a) Zerlegen Sie $f$ in irreduzible Faktoren über $\mathbb{C}$.
   (b) Zerlegen Sie $f$ in irreduzible Faktoren über $\mathbb{R}$.
   (c) Zerlegen Sie $f$ in irreduzible Faktoren über $\mathbb{Q}$.
   (d) Finden Sie einen Körper $K$ verschieden von $\mathbb{Q}$ und $Z$ mit $\mathbb{Q} \leq K \leq Z$, indem Sie ein $\beta \in K$ angeben mit $K = \mathbb{Q}(\beta)$. Bestimmen Sie außerdem die Erweiterungsgrade $[K : \mathbb{Q}]$, $[Z : K]$ und $[Z : \mathbb{Q}]$.

2. Wir definieren eine Kategorie $\mathcal{C}$. Die Objekte von $\mathcal{C}$ seien alle Paare $(f, G)$, wobei $G$ eine Gruppe und $f : \mathbb{Z} \to G$ eine Gruppenhomomorphismus ist. Die Morphismen in $\mathcal{C}$ von $(f_1, G_1)$ nach $(f_2, G_2)$ seien jene Grupenhomomorphismen $\varphi : G_1 \to G_2$, für die $\varphi \circ f_1 = f_2$ gilt. Komposition sei die übliche Verkettung von Abbildungen.
   (a) Begründen Sie, warum es sich bei $\mathcal{C}$ tatsächlich um eine Kategorie handelt.
   (b) Gibt es in $\mathcal{C}$ ein initiales Objekt? Wenn ja, welches; wenn nein, warum nicht?
   (c) Gibt es in $\mathcal{C}$ ein terminales Objekt? Wenn ja, welches; wenn nein, warum nicht?
   (d) Gibt es in $\mathcal{C}$ Objekte $(f_1, G_1)$ und $(f_2, G_2)$, für die es in $\mathcal{C}$ keinen Morphismus von $(f_1, G_1)$ nach $(f_2, G_2)$ gibt? Wenn ja, geben Sie solche an; wenn nein, warum nicht?

3. Wie üblich bezeichne $\mathbb{Q}(x)$ den Quotientenkörper des Polynomrings $\mathbb{Q}[x]$ über den rationalen Zahlen. Die Elemente von $\mathbb{Q}(x)$ heißen gebrochen rationale Funktionen. Setzen wir $f \leq g$ für $f, g \in \mathbb{Q}(x)$, wenn es ein $q_0 \in \mathbb{Q}$ gibt mit $f(q) \leq g(q)$ für alle $q \geq q_0$, so wird $\mathbb{Q}(x)$ zu einem angeordneten Körper.
   (a) Ziemlich offensichtlich ist, dass $\leq$ auf $\mathbb{Q}(x)$ reflexiv und transitiv ist. Warum handelt es sich sogar um eine Totalordnung? (Angabe der zu überprüfenden Bedingung und kurze Begründung, warum sie hier erfüllt ist)
   (b) Wir wissen mittlerweile: $\mathbb{Q}(x)$ ist (als Quotientenkörper) ein Körper und bezüglich $\leq$ totalgeordnet. Was muss darüber hinaus gelten, damit es sich, wie oben behauptet, um einen angeordneten Körper handelt? (Es genügt, die Bedingungen anzugeben. Sie müssen sie nicht überprüfen.)
   (c) Ist $\mathbb{Q}(x)$ bezüglich $<$ sogar archimedisch angeordnet? Begründen Sie Ihre Antwort.
   (d) Ist $\mathbb{Q}(x)$ bezüglich $<$ vollständig angeordnet? Begründen Sie Ihre Antwort.

4. Sei $R := \mathbb{Z}[i] = \{a + ib : \ a, b \in \mathbb{Z}\} \subseteq \mathbb{C}$ der sogenannte Ring der Gaußschen Zahlen und $R[x]$ der Polynomring über $R$.

   (a) Welche der folgenden Klassen ist die kleinste, die $R$ bzw. $R[x]$ enthält?
   faktorielle Ringe, kommutative Ringe mit 1, Hauptidealringe, Körper, euklidische Ringe, Integritätsbereiche
   (Falls Sie bei der Beantwortung zögern, könnte der Hinweis unten nützlich sein.)

   (b) Finden Sie ein irreduzibles Element in $R$.

   (c) Finden Sie ein irreduzibles Polynom aus $R[x]$ vom Grad $\geq 2$.

   (d) Geben Sie sämtliche Einheiten in $R[x]$ an.

   Hinweis: Auf $R$ ist die (multiplikative) Normfunktion $N(z) := |z|^2 = (a+ib)(a-ib) = a^2+b^2$ für $a, b \in \mathbb{Z}$ definiert. Für beliebige $z, z_0 \in \mathbb{C}$ mit $z_0 \neq 0$ lässt sich ihr Quotient durch ein Element $q := a + ib \in R$ approximieren, genauer: Es gibt $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \mathbb{R}$ mit $|\varepsilon_1|, |\varepsilon_2| \leq \frac{1}{2}$ derart, dass $\frac{z}{z_0} = (a + \varepsilon_1) + i(b + \varepsilon_2)$ und $a, b \in \mathbb{Z}$. Setzen wir $r := \varepsilon_1 + i\varepsilon_2$, so bedeutet das $z = qz_0 + r_0$ mit $r_0 = rz_0$, also $N(r_0) = |r|^2 N(z_0)$. Wegen $N(r) = |r|^2 = \varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 \leq \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$ und $N(z_0) > 0$ bedeutet das $N(r_0) = N(r)N(z_0) \leq \frac{N(z_0)}{2} < N(z_0)$.