Algebra, Prüfung am 27.1.2017, Winkler

Name, Matrikelnummer (bitte ausfüllen):

Terminvereinbarung für die **mündliche Prüfung**: persönlich, unmittelbar nach der schriftlichen Prüfung im Bereich vor dem Hörsaal

Hinweise bevor Sie beginnen:
Die einzelnen Teilfragen haben ungefähr gleiches Gewicht.
Verwenden Sie für jede der vier Aufgaben ein eigenes Blatt. Bei Bedarf können Sie zusätzliche Blätter haben.
Ihre Arbeitszeit beträgt 100 Minuten.
Vergessen Sie nicht auf die Rückseite der Angabe.

1. Die Automorphismen einer Algebra bilden stets in natürlicher Weise eine Gruppe G. Insbesondere ist das der Fall, wenn es sich bei der Algebra um einen Vektorraum V über einem Körper K handelt. Hat V endliche Dimension n, so schreiben wir traditionsgemäß für G auch $GL(K,n)$ („General Linear Group"). Ist eine Basis B von V gegeben, so gibt es eine natürliche Identifikation von $GL(K,n)$ mit der Gruppe aller quadratischen $n \times n$ Matrizen über K mit Determinante $\neq 0$. Für $U \subseteq K$ bezeichne G_U die Menge aller $f \in GL(K,n)$, deren *Determinante* in U liegt, $GL(U,n)$ die Menge jener $f \in GL(K,n)$, in deren Matrizendarstellung bezüglich B alle *Eintragungen* in U liegen.
   (a) Zeigen Sie, dass G_U eine Untergruppe von $GL(K,n)$ ist, sofern U eine Untergruppe der multiplikativen Gruppe $K \setminus \{0\}$ ist. Hinweis: Sie dürfen die aus der Linearen Algebra vertraute Multiplikativität der Determinante verwenden.
   (b) Zeigen Sie, dass G_U sogar ein Normalteiler von G ist (wieder für eine multiplikative Untergruppe U von $K \setminus \{0\}$).
   (c) Ist U ein Unterring von K, so gilt $GL(U,n) \subseteq G_U$. Wie steht es mit der Umkehrung? (Begründung oder Gegenbeispiel)
   (d) Sei speziell $K = \mathbb{R}$, $V = \mathbb{R}^2$ und $U = \mathbb{Q} \setminus \{0\}$. Ist der Index der Untergruppe $G_{\mathbb{Q}}$ in $GL(\mathbb{R},2)$ endlich oder unendlich? (Begründung)

2. Ist K ein Körper, so bezeichne $K(x)$ den Körper der gebrochen rationalen Funktionen über K, $\overline{K}$ einen algebraischen Abschluss von K. Untersuchen Sie, ob es isomorphe Körpereinbettungen ι_k, $k = 1,2,3,4$, wie folgt gibt. Begründen Sie Ihre Antwort. Im positiven Fall genügt, sofern möglich, die explizite Angabe eines entsprechenden ι_k.
   (a) $\iota_1 : \mathbb{Q}(x) \to \mathbb{R}$
   (b) $\iota_2 : \mathbb{Q}(x) \to \mathbb{C}$
   (c) $\iota_3 : \overline{\mathbb{Q}(x)} \to \mathbb{R}$
   (d) $\iota_4 : \overline{\mathbb{Q}(x)} \to \mathbb{C}$

3. Sei $(R, +, 0_R, \cdot, 1_R)$ ein kommutativer Ring mit Einselement.

   (a) Für eine Äquivalenzrelation $\sim$ auf R schreiben wir $[0]_\sim$ für die $\sim$-Klasse, in der 0_R liegt. Welche Abschlusseigenschaften charakterisieren jene Teilmengen T von R, die sich als $[0]_\sim$ für eine Kongruenzrelation $\sim$ von $(R, +, 0_R, \cdot, 1_R)$ schreiben lassen?

   (b) Angenommen I ist ein Ideal von R und J ein Ideal von R/I. Geben Sie ein Ideal J_R von R an, für das $R/J_R \cong (R/I)/J$ gilt und beschreiben Sie einen Isomorphismus $\varphi : R/J_R \to (R/I)/J$.

   (c) Ist R ein Hauptidealring und I ein Ideal von R, so muss R/I kein Hauptidealring sein, weil die Nullteilerfreiheit verloren gehen kann. Dennoch kann jedes Ideal von R/I von einem einzigen Element erzeugt werden. Wie lässt sich ein solches finden?

   (d) Beschreiben Sie bis auf Isomorphie sämtliche homomorphen Bilder des Restklassenringes $\mathbb{Z}_m$ modulo m.

4. Sei K ein Körper und $f \in K[x]$ ein Polynom über K. Dann bezeichne Z_f einen Zerfällungskörper von f über K. Im Folgenden sei speziell K der Restklassenkörper mit 5 Elementen in üblicher Schreibweise, außerdem $f_k(x) := x^k - 1$ für $k \in \mathbb{N}$. Zum Beispiel ist $Z_{f_k} = K$ für $k = 0, 1, 2$. Bestimmen Sie die Kardinalität $|Z_{f_k}|$ des Zerfällungskörpers Z_{f_k} von f_k für die angegebenen Werte von k. Begründen Sie jeweils Ihre Antwort. Hinweis: Wenn Sie zu Beginn Ihre Vorgangsweise allgemein erklären, können Sie sich einige Schreibarbeit ersparen, weil dann für jedes k eine kurze Rechnung ausreicht.

   (a) $k = 3$

   (b) $k = 4$

   (c) $k = 5$

   (d) $k = 6$