Algebra, Prüfung am 3.3.2017, Winkler

Name, Matrikelnummer (bitte ausfüllen):

Terminvereinbarung für die **mündliche Prüfung**: persönlich, unmittelbar nach der schriftlichen Prüfung im Bereich vor dem Hörsaal

Hinweise bevor Sie beginnen:
Die einzelnen Teilfragen haben ungefähr gleiches Gewicht.
Verwenden Sie für jede der vier Aufgaben ein eigenes Blatt.
Bei Bedarf werden Ihnen zusätzliche Blätter gegeben.
Ihre Arbeitszeit beträgt 100 Minuten.
Vergessen Sie nicht auf die Rückseite der Angabe.

1. Sei $\alpha := \sqrt[3]{2} \in \mathbb{R}$.

   (a) Geben Sie sämtliche $\beta \in \mathbb{C}$ an, für die es einen Körperisomorphismus $\varphi : \mathbb{Q}(\alpha) \to \mathbb{Q}(\beta)$ mit $\varphi(\alpha) = \beta$ gibt.

   (b) Geben Sie den Erweiterungsgrad $[\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}]$ an.

   (c) Geben Sie den Erweiterungsgrad $[E : \mathbb{Q}]$ an, wenn E jener Unterkörper von $\mathbb{C}$ ist, der von der Menge aller β wie in (a) erzeugt wird.

   (d) Beschreiben Sie die Menge M aller $\beta \in \mathbb{C}$, für die es irgendeinen Körperisomorphismus
   $$\varphi : \mathbb{Q}(\alpha) \to \mathbb{Q}(\beta)$$
   gibt (wo $\varphi(\alpha) = \beta$ im Gegensatz zu (a) also *nicht* verlangt ist).

2. Bezeichne P die Potenzmenge (d h. die Menge aller Teilmengen) von $\mathbb{N}$. Dann ist die Algebra $(P, \cup, \cap, \emptyset, \mathbb{N}, ')$ vom Typ $(2, 2, 0, 0, 1)$ eine Boolesche Mengenalgebra. Ausnahmsweise bezeichnen wir die Menge aller Primzahlen mit dem Kleinbuchstaben p, die Menge aller geraden Zahlen in $\mathbb{N}$ mit g. Sowohl p als auch g sind Elemente von P, und wir können die von $\{p, g\}$ erzeugte Unteralgebra B von P betrachten.

   (a) Geben Sie alle Atome (= obere Nachbarn des kleinsten Elements) in B an.

   (b) Wie viele Elemente enthält die Trägermenge von B?

   (c) Beschreiben Sie die von einem Element x frei erzeugte Boolesche Algebra, indem Sie deren Hassediagramm skizzieren.

   (d) Ist B frei über $\{p, g\}$? Auf welche Eigenschaften von p und g kommt es dabei an?

3. Sei $M := \mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ das kartesische Produkt abzählbar unendlich vieler Kopien von $\mathbb{Z}$. Die Elemente von M schreiben wir wie üblich als Familien $(k_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $k_n \in \mathbb{Z}$ an. Auf dieser Trägermenge M betrachten wir die Struktur $(M, \cdot_R, 1_R)$, die als das direkte Produkt lauter Kopien des multiplikativen Monoids $(\mathbb{Z}, \cdot, 1)$ definiert sei. Wie in jedem Monoid seien für $a, b \in M$ Teilbarkeit $a|b$ durch $\exists m \in M: \ am = b$ und Assoziiertheit $a \sim b$ durch $a|b \wedge b|a$ definiert. Die Menge aller Teiler des Einselements $1_R \in R$ sei mit E bezeichnet.

   (a) Beschreiben Sie jene $(k_n)_{n\in\mathbb{N}} \in M$, die in E liegen.

   (b) Gilt in M der Teilerkettensatz? (Begründung oder Gegenbeispiel)

   (c) Beschreiben Sie die Atome (= die oberen Nachbarn des kleinsten Elements) in der Faktorhalbordnung $(M/_\sim, |)$ der Teilbarkeitshalbordnung $(M, |)$ auf M, indem Sie eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür formulieren, dass die Äquivalenzklasse eines Elementes $(k_n)_{n\in\mathbb{N}} \in M$ bzüglich $\sim$ ein Atom ist.

   (d) Betrachtet man auf M nicht nur die Monoidstruktur, sondern die eines Rings mit Einselement, die das direkte Produkt gleichfalls von $\mathbb{Z}$ erbt, so ist wohldefiniert, was darin Primelemente sind. Beschreiben Sie die Primelemente unter den $(k_n)_{n\in\mathbb{N}} \in M$.

4. Wieder gehen wir von einem Monoid M aus. Allerdings geht es in dieser Aufgabe nicht um Teilbarkeit, sondern um die Möglichkeit, aus einem Monoid eine Gruppe zu machen. Um den Unterschied zu isomorphen Einbettungen in eine Gruppe (die es nicht zu jedem Monoid gibt) deutlich zu machen, nennen wir ein Paar (G, φ) eine Gruppenerweiterung im weiteren Sinn, abgekürzt GiwS, von M wenn gilt: G ist eine Gruppe, $\varphi: M \to G$ ist ein Monoidhomomorphismus, und G wird als Gruppe von $\varphi(M)$ erzeugt.

   (a) Beschreiben, was man unter einer Quotientengruppe eines Monoids M versteht.

   (b) Begründen Sie, warum es zu jedem Monoid M eine GiwS von M gibt. (Am einfachsten ist es, zu vorgegebenem M ein Beispiel anzugeben.)

   (c) Es gibt eine Menge X derart, dass es zu jeder GiwS (G, φ) von M eine GiwS (G_X, φ_X) von M und einen Gruppenisomorphismus $\psi: G \to G_X$ gibt derart, dass G_X (genauer die Trägermenge von G_X) in X enthalten ist und $\varphi_X = \psi \circ \varphi$.

   Auf welche Eigenschaft von X kommt es dabei an? Hinweis: Ein Argument dieser Art kann für die Konstruktion einer freien Algebra in einer Varietät verwendet werden.

   (d) Sei X wie in (c) und S das System aller GiwS von M, deren Trägermenge eine Teilmenge von X ist. Elemente $s \in S$ schreiben wir der Deutlichkeit halber als mit s indizierte GiwS (G_s, φ_s) an. Wir betrachten die Abbildung

   $$\iota: m \mapsto (\varphi_s(m))_{s\in S}$$

   von M in das kartesische Produkt X^S, dessen Elemente wiederum Abbildungen (=Familien) sind, nämlich alle $(x_s)_{s\in S}: s \mapsto x_s$ von S nach X. Das Bild $\iota(M)$ ist ein Untermonoid des direkten Produktes $G^*(M) := \prod_{s\in S} G_s$ aller Gruppen $G_s \subseteq X$, $s \in S$. Beschreiben Sie mit Hilfe dieser Konstruktion eine GiwS $(G(M), \varphi_M)$ mit folgender (universellen) Eigenschaft:

   Jede GiwS ist homomorphes Bild dieser universellen GiwS, genauer: Zu jeder GiwS (G, φ) gibt es einen eindeutigen surjektiven Gruppenhomomorphismus $\psi: G(M) \to G$ mit $\varphi = \psi \circ \varphi_M$.