Algebra, Prüfung am 30.11.2018, Winkler

Name, Matrikelnummer (bitte gleich ausfüllen):

Terminvereinbarung für die mündliche Prüfung persönlich im Anschluss an die schriftliche unmittelbar vor dem Hörsaal.

Hinweise bevor Sie beginnen:
Die einzelnen Teilfragen haben ungefähr gleiches Gewicht.
Verwenden Sie für jede der drei Aufgaben ein eigenes Blatt.
Bei Bedarf erhalten Sie zusätzliche Blätter.
Ihre Arbeitszeit beträgt 100 Minuten.
Vergessen Sie nicht auf die Rückseite der Angabe.

1. In dieser Aufgabe geht es um Verbände und Boolesche Algebren.

   (a) Ein Verband im algebraischen Sinn ist ein Algebra $(V, \vee, \wedge)$ vom Typ $(2,2)$, in der bestimmte Gesetze gelten. Wie lauten diese Gesetze? (Anmerkung: „Gesetz“ ist hier im Sinne der Universellen Algebra zu verstehen, d.h. als Gleichung $t_1(x_1, \ldots, x_n) = t_2(x_1, \ldots, x_n)$ mit Termen t_1 und t_2 für den Typ $(2,2)$, die in jedem Verband für jede Variablenbelegung gilt.)

   (b) Ein Verband im ordnungstheoretischen Sinn ist eine Halbordnung $(V, \leq)$, die gewisse zusätzliche Bedingungen erfüllt. Welche?

   (c) Erklären Sie, durch welche Definition von Relation bzw. Operationen Verbände im algebraischen Sinn auch solche im ordnungstheoretischen Sinn werden und umgekehrt.

   (d) Sind B_1 und B_2 Boolesche Algebren und $\varphi : B_1 \to B_2$ ein Homomorphismus, so ist das Urbild $F := \varphi^{-1}(1_{B_2})$ des Einselementes 1_{B_2} in B_2 unter φ ein Filter in B_1, d.h. eine nichtleere Teilmenge $F \subseteq B_1$ mit folgenden beiden Eigenschaften: $a \in F$ und $a \leq b$ impliziert $b \in F$; $a, b \in F$ impliziert $a \wedge b \in F$. Ist $B_2 = \{0,1\}$ die zweielementige Boolesche Algebra, so treten als solche Urbilder $\varphi^{-1}(1_{B_2})$ genau jene Filter F in B_1 auf, die noch eine zusätzliche Eigenschaft haben, die sich auch ohne Bezugnahme auf Homomorphismen formulieren lässt. Wie lautet diese Eigenschaft solcher F?

   (e) Gegeben sei eine Boolesche Algebra B. Geben Sie unter Verwendung des Darstellungssatzes von Stone eine isomorphe Einbettung von B in ein direktes Produkt $\prod_{m \in M} \{0,1\}$ zweielementiger Boolescher Algebren mit einer geeigneten Indexmenge M an.

   (f) Begründen Sie, warum jedes Gesetz (zu verstehen im Sinne der Universellen Algebra, siehe (a)), das in der zweielementigen Booleschen Algebra gilt, sogar in jeder Booleschen Algebren gilt. Hinweis: Verwenden Sie (e).

2. Wir betrachten die Integritätsbereiche $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}_2[x]$ (Polynomring über dem zweielementigen Körper) und $\mathbb{Q}[[x]]$ (Ring der formalen Potenzreihen $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ mit Koeffizienten $a_n \in \mathbb{Q}$) insbesondere unter Gesichtspunkten der Teilbarkeitstheorie. Wir verwenden die Bezeichnungsweise $M(R) := (R \setminus \{0\})/_\sim$ für das multiplikative Monoid der von 0 verschiedenen Elemente des Integritätsbereichs R faktorisiert nach der Assoziiertheitsrelation $\sim$ und $E(R)$ für die Gruppe der Einheiten in R.

   (a) Beschreiben Sie die Einheitengruppen $E(\mathbb{Z})$, $E(\mathbb{Z}_2[x])$, $E(\mathbb{Q}[[x]])$. (Die Angabe der Trägermenge genügt.)

   (b) Gibt es zwischen den Ringen $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}_2[x]$ und $\mathbb{Q}[[x]]$ Isomorphismen? Begründen Sie Ihre Antwort, entweder durch Angabe eines Isomorphismus oder durch Angabe von isomorphieinvarianten Eigenschaften, hinsichtlich derer sich die Ringe paarweise unterscheiden. Hinweis: Teilaufgabe (a) kann helfen.

   (c) Gesucht ist eine formale Potenzreihe $p \in \mathbb{Q}[[x]]$ mit folgender Eigenschaft: Jedes $f \in \mathbb{Q}[[x]] \setminus \{0\}$ lässt sich in eindeutiger Weise als $f = ep^k$ mit $e \in E(\mathbb{Q}[[x]])$ und $k \in \mathbb{N}$ schreiben. Geben Sie die Koeffizienten $a_n \in \mathbb{Q}$ eines solchen $p = p(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \in \mathbb{Q}[[x]]$ an.

   (d) Ist $\mathbb{Q}[[x]]$ ein faktorieller Ring? Begründen Sie Ihre Antwort.

   (e) Welche der Monoide $M(\mathbb{Z})$, $M(\mathbb{Z}_2[x])$ und $M(\mathbb{Q}[[x]])$ sind isomorph zueinander, welche nicht?

   (f) Begründen Sie Ihre Antwort aus (e).

3. In dieser Aufgabe geht es um Gruppen G vorgegebener Ordnung.

   (a) Geben Sie eine Liste abelscher Gruppen der Ordnung 360 an, die von jedem Isomorphietyp genau einen Vertreter enthält.

   (b) Geben Sie drei nichtabelsche Gruppen G_1, G_2 und G_3 der Ordnung 360 an, die paarweise nicht isomorph zueinander sind (siehe auch Teilaufgaben (c), (d) und (e)).

   (c) Geben Sie eine Eigenschaft an, die durch Isomorphismen übertragen wird und hinsichtlich derer sich die Gruppen G_1 und G_2 aus Teilaufgabe (b) unterscheiden. (Sie müssen nicht beweisen, dass G_1 diese Eigenschaft hat und G_2 nicht oder umgekehrt; die Angabe einer solchen Eigenschaft genügt.)

   (d) Wie Teilaufgabe (c), nur mit G_1 und G_3 (statt G_1 und G_2).

   (e) Wie Teilaufgabe (c), nur mit G_2 und G_3 (statt G_1 und G_2).

   (f) Geben Sie (bis auf Isomorphie) alle Gruppen G einer Ordnung ≤ 100 an, zu denen es Körper K_1 und K_2 gibt, so dass sowohl die additive Gruppe $(K_1, +)$ als auch die multiplikative Gruppe $(K_2 \setminus \{0\}, \cdot)$ isomorph zu G ist.