Analysis 1 für Lehramt, Prüfung am 28.9.2012 (Winkler)

Name, Matrikelnummer:

Mündliche Prüfung: Bitte melden Sie sich per e-mail bei reinhard.winkler@tuwien.ac.at zwecks Terminvereinbarung.

Hinweise bevor Sie beginnen:
1. Die einzelnen Teilfragen haben ungefähr gleiches Gewicht.
2. Ihre Arbeitszeit beträgt 100 Minuten.

1. Auf $\mathbb{R}^2$ bezeichne wie üblich $||.||_1$ die Summen-, $||.||_2$ die euklidische und $||.||_\infty$ die Maximumsnorm, $d_p(x,y) := ||x-y||_p$ die zugehörige Metrik. Außerdem bestehe die Menge $M_{p,c}$ aus jenen Punkten $a = (x,y) \in [-1,1]^2 \subseteq \mathbb{R}^2$, für die es einen Punkt $b = (k,l)$ mit $k,l \in \mathbb{Z}$ gibt, so dass $d_p(a,b) \leq c$ gilt. Skizzieren Sie:
   (a) die Menge $M_{1,\frac{1}{3}}$
   (b) die Menge $M_{2,\frac{1}{2}}$
   (c) das Innere der Menge $M_{\infty,\frac{1}{2}}$ in $\mathbb{R}^2$
   (d) den Rand der Menge $M_{\infty,\frac{1}{3}}$ in $\mathbb{R}^2$
   (e) Welche der Mengen aus (a), (b), (c) und (d) sind kompakt? (Begründung)
   (f) Wie lautet die Definition von Kompaktheit eines beliebigen topologischen Raumes X?

2. (a) Geben Sie die strenge Definition, was für reelle Zahlen x_n, $n \in \mathbb{N}$, und x die Formel $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ bedeutet.
   (b) Geben Sie die rekursive Definition der Partialsummen s_n, $n \in \mathbb{N}$, der Reihe $\sum_{n=1}^\infty a_n$, $a_n \in \mathbb{R}$.
   (c) Geben Sie die strenge Definition, was die Formel $\sum_{n=1}^\infty a_n = s$ bedeutet.
   (d) Beweisen Sie unter Bezugnahme auf die Definition aus (a): Aus $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ und $\lim_{n\to\infty} y_n = y$ folgt $\lim_{n\to\infty}(x_n - y_n) = x - y$.
   (e) Beweisen Sie: Konvergiert eine Reihe $\sum_{n=1}^\infty a_n$, $a_n \in \mathbb{R}$, so bilden ihre Glieder eine Nullfolge. (Hinweis: Sie dürfen $\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} s_{n+1}$ und (d) verwenden.)

3. Bezeichne $\mathbb{P}$ die Menge aller Primzahlen, $\mathbb{P}_{100} := \{p \in \mathbb{P} : \ p \leq 100\}$. In dieser Aufgabe soll die Anzahl $|\mathbb{P}_{100}|$ bestimmt werden, allerdings nicht durch schlichtes Abzählen, sondern durch Einsatz des Inklusions-Exklusionsprinzips. Für jedes $m \in \mathbb{N}$ sei $V_m = \{nm : \ n \in \mathbb{N}, 0 < nm \leq 100\}$ und $\lfloor x \rfloor$ (für ein beliebiges $x \in \mathbb{R}$) die größte ganze Zahl $k \leq x$.
   (a) Begründen Sie: Jede ganze Zahl $k > 1$, die keine Primzahl ist, besitzt einen Primteiler p mit $p \leq \sqrt{k}$.
   (b) Wegen (a) ist eine Zahl $k \in \{2,3,4,\ldots,100\}$, die durch keine der Primzahlen $p = 2,3,5,7$ teilbar ist, selbst eine Primzahl. Um die Elemente von $\mathbb{P}_{100}$ zu zählen, interessieren wir uns zunächst für die Menge $M := V_2 \cup V_3 \cup V_5 \cup V_7$. Stellen Sie die Zahl $|M|$ gemäß dem Inklusions-Exklusionsprinzip als alternierende Summe von Kardinalitäten von Schnitten gewisser V_p mit $p \in \{2,3,5,7\}$ dar.
   (c) Für paarweise verschiedene Primzahlen $p_1,\ldots,p_n$ und $m = \prod_{i=1}^n p_i$ gilt: $V_m = \bigcap_{i=1}^n V_{p_i}$. Benutzen Sie diese Beziehung, um in der alternierenden Summe aus (b) die auftretenden Schnitte durch geeignete Mengen V_m zu ersetzen.
   (d) Bestimmen Sie nun $|\mathbb{P}_{100}|$, indem Sie folgendermaßen vorgehen: Begründen Sie die Beziehung $|\mathbb{P}_{100}| = 100 - |M| + |\{2,3,5,7\}| - |\{1\}|$ und verwenden Sie in der in (c) gewonnenen Darstellung von $|M|$ die offensichtliche Formel $|V_m| = \lfloor \frac{100}{m} \rfloor$ für $m = 1,2,\ldots$.