Analysis 2 für Lehramt, schriftliche Prüfung am 26.6.2009, Winkler

Name, Matrikelnummer:

Mündliche Prüfung vereinbart für:

Hinweise, bevor Sie beginnen:

- Rückseite nicht vergessen!
- Die angegebene Reihenfolge der Teilfragen innerhalb eines Beispiels ist empfehlenswert, muss aber nicht eingehalten werden.
- Die einzelnen Teilfragen haben ungefähr gleiches Gewicht.
- Ihre Arbeitszeit beträgt 100 Minuten.

1. Für allgemeines $\alpha \in \mathbb{R}$ sei $f_\alpha(x) = |x|^\alpha x$ für $x \neq 0$ und $f_\alpha(0) = 0$.
   (a) Skizzieren Sie $f_{-\frac{1}{2}}$.
   (b) Ist $f_{-\frac{1}{2}}$ an der Stelle 0 differenzierbar? Berechnen Sie gegebenenfalls $f'_{-\frac{1}{2}}(0)$.
   (c) Skizzieren Sie $f_{\frac{1}{2}}$.
   (d) Ist $f_{\frac{1}{2}}$ an der Stelle 0 differenzierbar? Berechnen Sie gegebenenfalls $f'_{\frac{1}{2}}(0)$.
   (e) Wie lautet der Mittelwertsatz der Differentialrechnung?
   (f) Veranschaulichen Sie den Mittelwertsatz durch eine Skizze für $f_{-\frac{1}{2}}$ auf dem Intervall $[0, 1]$.

2. Wir beschäftigen uns nun mit Potenzreihen $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ um den Entwicklungspunkt x_0 mit Konvergenzradius $r \in [0, \infty]$.
   (a) Sei speziell $x_0 = 0$ und $a_n = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann gibt es eine gebrochen rationale Funtion g mit $g(x) = f(x)$ für alle x aus einer Umgebung D von 0. Wie lautet g und wie kann D maximal gewählt werden?
   (b) Was lässt sich generell über den Konvergenzbereich von Potenzreihen aussagen?
   (c) Wie ist der Konvergenzradius r von f definiert, und wie lässt er sich berechnen? (Es spart unter Umständen Zeit, wenn Sie sich in Ihrer Antwort auf (b) beziehen.)

(d) Leiten Sie mit Hilfe der Beziehung $\ln' x = \frac{1}{x}$ eine Potenzreihendarstellung der Funktion $f(x) = \ln(x+1)$ um $x_0 = 0$ her.

(e) Unter welcher Voraussetzung an r gilt $a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$?

(f) Geben Sie eine Formel für die b_n in $f^2(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(x-x_0)^n$ an, die wenigstens für alle x im Inneren des Konvergenzbereichs von f gilt.

3. Punktweise und gleichmäßige Konvergenz

(a) Definieren Sie punktweise und gleichmäßige Konvergenz einer Folge von Funktionen $f_n : X \to \mathbb{R}$ gegen die Funktion $f : X \to \mathbb{R}$, wobei insbesondere der Unterschied zwischen den beiden Begriffen hervorzuheben ist.

(b) Geben Sie zwei Beispiele, die (a) illustrieren.

(c) Wie lautet der Satz von Stone-Weierstraß? (Sie dürfen sich dabei auf reellwertige Funktionen auf einem Intervall $[a, b]$ beschränken und den Begriff der Funktionenalgebra voraussetzen.)

(d) Gibt es eine Folge von Polynomen, die auf $[-1, 1] \setminus \{0\}$ gleichmäßig gegen $f(x) = \frac{x}{|x|}$ konvergiert?

(e) Skizzieren Sie die Funktion f aus (d).

(f) Gibt es eine Folge von Polynomen, die auf $[-1, 1]$ gleichmäßig gegen $f(x) = |x|$ konvergiert?

4. Sei $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ für $x \neq 0$.

(a) Wann heißt eine Funktion $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar?

(b) Formulieren Sie einen Teil des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung.

(c) Formulieren Sie den anderen Teil.

(d) Gibt es eine stetige Fortsetzung von f an der Stelle 0? (Begründung)

(e) Welche Werte darf $f(0)$ annehmen so, dass f auf $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ Riemann-integrierbar ist, welche dass eine Stammfunktion existiert?

(f) Sie dürfen verwenden, dass

$$\frac{2}{(k+1)\pi} \leq |I_k| \leq \frac{2}{k\pi}, \quad \text{für } I_k = \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} f(x)\,dx, \quad k = 1, 2, 3, \ldots.$$

gilt. (Die Stammfunktion von f lässt sich übrigens nicht elementar darstellen.) Die Frage an Sie lautet: Existiert der Grenzwert

$$\lim_{k\to\infty} \int_1^k f(x)\,dx$$

bzw. das Integral

$$\int_{[1,\infty)} f\,d\lambda?$$