

Analysis 2 für Lehramt, schriftliche Prüfung am 2.10.2009, Winkler

Name, Matrikelnummer:

Mündliche Prüfung vereinbart für:

Hinweise, bevor Sie beginnen:

- Rückseite nicht vergessen!
- Die angegebene Reihenfolge der Teilfragen innerhalb eines Beispiels ist empfehlenswert, muss aber nicht eingehalten werden.
- Die einzelnen Teilfragen haben ungefähr gleiches Gewicht.
- Ihre Arbeitszeit beträgt 100 Minuten.

1. Gegeben sei $f : x \mapsto \frac{\sin x}{x-\pi}$,

- Bestimmen Sie den maximalen Definitionsbereich $D \subseteq \mathbb{R}$ von f und die Nullstellen von f .
- Gibt es eine stetige Fortsetzung von f auf ganz \mathbb{R} ? Wenn ja, geben Sie diese an; wenn nein, warum nicht?
- Bestimmen Sie allfällige Asymptoten von f .
- Fertigen Sie eine Skizze mit den Funktionen $\frac{1}{x-\pi}$, $\frac{-1}{x-\pi}$ und f an.
- Bestimmen Sie $f'(x)$ für $x \in D$.
- Gibt es ein lokales Extremum von f in $(-\pi, 0)$? (Begründung!)
- Wieviele lokale Extrema besitzt f insgesamt?
- Besitzt f ein globales Extremum? Wenn ja, geben Sie eines an; wenn nein, warum nicht?

2. Sei $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ mit $D \subseteq \mathbb{R}$ und $x_0 \in D$. Wir betrachten die beiden Aussagen (i) $f'(x_0) = 0$ und (ii) x_0 ist lokale Extremstelle von f .

- Formulieren eine Voraussetzung mit der zusammen aus (i) die Aussage (ii) folgt.
- Formulieren eine Voraussetzung mit der zusammen aus (ii) die Aussage (i) folgt.
- Zeigen Sie anhand eines Beispiels, dass (a) ohne die dort von Ihnen angegebene Zusatzvoraussetzung nicht gilt. (Skizze!)

- (d) Zeigen Sie anhand eines Beispiels, dass (b) ohne die dort von Ihnen angegebene Zusatzvoraussetzung nicht gilt. (Skizze!)
- (e) Skizzieren Sie, wie (a) aus dem Taylorschen Satz folgt.
- (f) Beweisen Sie (b).
3. Sei $x \geq 0$ und $F_i(x) = \int_0^x f_i(t) dt$ (sofern dieses Integral definiert ist), wobei $f_1(t) = 1$ für $0 \leq t < 1$, $f_1(t) = -1$ für $1 \leq t$, $f_2(t) = \inf\{|t - k| : k \in \mathbb{Z}\}$, $f_3(t) = \frac{1}{t-2}$ für $t \neq 1$ und $f_3(1) = 0$.
- (a) Skizzieren und berechnen Sie F_1 .
- (b) Skizzieren Sie f_2 und berechnen Sie F_2 auf $[0, 1]$.
- (c) Für welche x ist F_3 definiert und welchen Wert nimmt F_3 dort an? (Skizze!)
- (d) Gibt es eine Stammfunktion von F_1 ? (Begründung)
- (e) Gibt es eine Stammfunktion von F_2 ? (Begründung)
- (f) Gibt es eine Stammfunktion von F_3 ? (Begründung)
- (g) Für reelle Funktionen f, F laute Bedingung (i): $F(x) = \int_0^x f(t) dt$ für alle $x \geq 0$; Bedingung (ii) laute: $F'(x) = f(x)$ für alle $x \geq 0$.
Unter welcher Zusatzvoraussetzung folgt aus (i) die Bedingung (ii)?
- (h) Umkehrung: Unter welcher Zusatzvoraussetzung folgt aus (ii) in (g) die Bedingung (i)?