Analysis 2 für Lehramt, Prüfung am 29.6.2012 (Winkler)

Name, Matrikelnummer (bitte ausfüllen):

Ort und Zeit der mündlichen Prüfung werden über TISS bekanntgegeben.

Hinweise bevor Sie beginnen:
1. Die einzelnen Teilfragen haben ungefähr gleiches Gewicht.
2. Ihre Arbeitszeit beträgt 100 Minuten.

1. (a) Skizzieren Sie den Einheitskreis mit einem α zwischen 0 und $\frac{\pi}{2}$ und der geometrischen Interpretation der Werte $\cos\alpha$, $\sin\alpha$, $\tan\alpha$ und $\cot\alpha$.

   (b) Geben Sie den Wert von $\tan\alpha$ für drei verschiedene Werte von α mit $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ an.

   (c) Wie kann man die Menge $A \subseteq \mathbb{R}$ maximal wählen, damit die Funktionen $\tan : A \to \mathbb{R}$ und $\arctan : \mathbb{R} \to A$ bijektiv sind? Stellen Sie die Funktionsgraphen in einer gemeinsamen Skizze dar.

   (d) Untersuchen Sie mittels Differentialrechnung, wo die Funktion arctan konvex und wo sie konkav ist.

   (e) Berechnen Sie f' für die Funktion $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, $f(x) := \arctan x + \arctan \frac{1}{x}$.

   (f) Welchen Wert nimmt die Funktion f aus (e) an den Stellen $x = -1$ und $x = 1$ an?

   (g) Welchen Wert nimmt die Funktion f an den Stellen $x = -2$ und $x = 2$ an? Anleitung: Verwenden Sie (e), (f) und den Mittelwertsatz.

2. Wie in der Vorlesung bezeichne p_α die Funktion $x \mapsto x^\alpha$, wobei der Definitionsbereich variieren möge.

   (a) Für $x > 0$ lässt sich die Umkehrfunktion $p_{\frac{1}{3}}$ von $p_3 : x \mapsto x^3$ schreiben als $f(x) = e^{\frac{1}{3}\ln x}$. Also ist $p_{\frac{1}{3}} = f \circ g \circ h$ als Verkettung dreier analytischer Funktionen $f : z \mapsto f(z)$, $g : y \mapsto g(y)$ und $h : x \mapsto h(x)$ selbst analytisch. Wie kann man in dieser Situation die Funktionen f, g, h wählen?

   (b) Für $x \leq 0$ scheitern die Überlegungen aus (a) daran, dass $\ln x$ nicht definiert ist. Wegen der Bijektivität von $p_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ kann man $p_{\frac{1}{3}}$ als Umkehrfunktion dennoch auf ganz $\mathbb{R}$ definiert. Stellen Sie, ähnlich wie in (a), $p_{\frac{1}{3}}(x)$ auch für $x < 0$ so als Komposition analytischer Funktionen dar, dass die Analytizität auch in diesem Bereich offensichtlich wird.

   (c) Wie lautet $p'_{\frac{1}{3}}(x)$ für $x > 0$?

   (d) Wie lautet $p'_{\frac{1}{3}}(x)$ für $x < 0$?

   (e) Entscheiden Sie anhand der allgemeinen Definition der Ableitung einer Funktion, ob $p_{\frac{1}{3}}$ an der Stelle $x = 0$ differenzierbar ist.

   (f) Ist $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, so besagt der Mittelwertsatz der Differentialrechnung, dass unter gewissen Bedingungen B eine Zwischenstelle $\xi \in \,]a, b[$ existiert, die eine gewisse Gleichung G erfüllt. Sind für $f = p_{\frac{1}{3}}$ und $[a, b] = [-1, 1]$ die Bedingungen B erfüllt? (Begründung)

   (g) Gibt es in der Situation von (f) ein $\xi \in \,]a, b[$, welches die Gleichung G erfüllt? Wenn ja, welches?

   (h) Wie (f) lediglich mit $[a, b] = [0, 1]$.

   (i) Wie (g), lediglich mit $[a, b] = [0, 1]$.

   (j) Fertigen Sie eine Skizze an, welche die Situation in (f), (g), (h) und (i) illustriert.