**Analysis 2 für Lehramt, Prüfung am 28.9.2012 (Winkler)**

Name, Matrikelnummer:

Mündliche Prüfung (bitte ankreuzen):
∘ Mi, 3.10., 16 Uhr (Freihaus, grüner Turm, 5.Stock, Prüfungs- und Besprechungsraum)
∘ Ab 8.10., ich melde mich per e-mail an reinhard.winkler@tuwien.ac.at zwecks Terminvereinbarung.

Hinweise bevor Sie beginnen:
1. Die einzelnen Teilfragen haben ungefähr gleiches Gewicht.
2. Ihre Arbeitszeit beträgt 100 Minuten.

1. Gegeben sei die Funktion $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ durch $f(\frac{k}{2^n}) = \frac{1}{n+1}$ für $k, n \in \mathbb{N}$, $k$ ungerade (dyadische Punkte in gekürzter Darstellung), und $f(x) = 0$ sonst.
   (a) Skizzieren Sie die Funktion $f$ schematisch, wobei wenigstens die Werte an den dyadischen Punkten $x = \frac{k}{2^n}$ mit $n = 0, 1, 2, 3$ und an den Stellen $x = \frac{1}{3}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{e}{5}$ und $\frac{\pi}{20}$ einzutragen sind.
   (b) Begründen Sie anhand der $\varepsilon$-$\delta$ Definition, warum $f$ an der Stelle $\frac{1}{2}$ unstetig ist.
   (c) Begründen Sie anhand der $\varepsilon$-$\delta$ Definition, warum $f$ an der Stelle $\frac{1}{3}$ stetig ist.
   (d) Geben Sie die Menge $U$ an, wo $f$ unstetig ist.
   (e) Ist $f$ differenzierbar an der Stelle $x = \frac{1}{2}$? (Begründung)
   (f) Ist $f$ differenzierbar an der Stelle $x = \frac{1}{3}$? (Begründung. Anleitung: Betrachten Sie für jedes $n \in \mathbb{N}$ einen Punkt $x_n = \frac{k_n}{2^n}$ mit ungeradem $k$ und $|x - x_n| \leq 2^{-n}$ sowie den Differenzenquotienten für $x$ und $x_n$.)
   (g) Gegeben sei die Zerlegung $Z = \{\frac{i}{1000} : \ i = 0, 1, \ldots, 1000\}$. Berechnen Sie die Untersumme $U(f, Z)$.
   (h) Begründen Sie, warum mit der Zerlegung $Z$ aus (g) für die Obersumme die Ungleichung $O(f, Z) < \frac{1}{2}$ gilt.
   (i) Ist $f$ Riemann-integrierbar? (Begründung, Grundidee ausgehend von (h) genügt.)

2. Die reelle Funktion $f$ erfülle auf ganz $\mathbb{R}$ die (Differential-) Gleichung G: $xf'(x) = 2f(x)$.
   (a) Berechnen Sie unter der Voraussetzung, dass $f$ eine Potenzreihendarstellung $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ auf ganz $\mathbb{R}$ besitzt, die Glieder $b_n$ der Potenzreihe $xf'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$.
   (b) Wie lautet der Identitätssatz für Potenzreihen?
   (c) Was lässt sich aus dem Identitätssatz (b) bei Anwendung auf die Gleichung G in Hinblick auf die Koeffizienten $a_n$ aus (a) schließen?
   (d) Wie lautet die Menge der analytischen Funktionen $f$, welche Lösung der Gleichung G sind?
   (e) Aus G folgt für $x \neq 0$ für die zweite Ableitung $f''(x) = \frac{2f(x)}{x^2}$. Zeigen Sie dies durch Rechnung.
   (f) Zeigen Sie mittels (e), dass aus G für $x \neq 0$ folgt: $f'''(x) = 0$.
   (g) Begründen Sie: Auch ohne eine Potenzreihenentwicklung wie in (a) vorauszusetzen, treten als Lösungen $f$ von G genau die Funktionen der Gestalt $f(x) = cx^2$ mit einem beliebigen $c \in \mathbb{R}$ auf.