Analysis 2 für Lehramt, Prüfung am 23.11.2012 (Winkler)

Name, Matrikelnummer:

Mündliche Prüfung: Bitte melden Sie sich per e-mail an `reinhard.winkler@tuwien.ac.at` zwecks Terminvereinbarung.

Hinweise bevor Sie beginnen:
1. Die einzelnen Teilfragen haben ungefähr gleiches Gewicht.
2. Ihre Arbeitszeit beträgt 100 Minuten.
3. Vergessen Sie nicht auf die Rückseite der Angabe.
4. Die einzelnen Teile jeder Aufgabe hängen zusammen. Dies schafft nicht nur Abhängigkeiten, sondern ist oft auch als Hilfe gedacht.

1. (a) Angenommen $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ sei stetig mit $f(a) < 0 < f(b)$ und $f(x) \neq 0$ für alle $x \in [a, b]$. Wir definieren rekursiv eine Folge von Intervallen $I_n = [a_n, b_n]$, indem wir mit $I_0 = [a, b]$ beginnen und als I_{n+1} eine der beiden Hälften $[a_n, \frac{a_n+b_n}{2}]$ oder $[\frac{a_n+b_n}{2}, b_n]$ von I_n nehmen, so dass $f(a_{n+1})$ und $f(b_{n+1})$ unterschiedliches Vorzeichen haben. Offenbar gilt $a = a_0 \leq a_1 \leq a_2 \leq \ldots \leq b_2 \leq b_1 \leq b_0 = b$, weshalb $a_\infty := \lim_{n\to\infty} a_n$ und $b_\infty := \lim_{n\to\infty} b_n$ existieren. Setzen Sie die Argumentation fort, bis ein Widerspruch auftritt.

   (b) Formulieren Sie jenen wichtigen Satz, der in (a) bewiesen wurde.

   (c) Beschreiben Sie alle zusammenhängenden Teilmengen von $\mathbb{R}$.

   (d) Ein allgemeiner Satz besagt, dass stetige Bilder zusammenhängender Mengen zusammenhängend sind. Wie lässt sich damit und unter Verwendung von (c) die in (a) bewiesene Aussage auf anderem Wege herleiten?

   (e) Begründen Sie, warum die Menge $M := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2 + y^2 = 1\}$ zusammenhängend ist, indem Sie eine surjektive und stetige Funktion $f : X \to M$ auf einer zusammenhängenden Menge X angeben.

2. (a) Wann nennt man eine Funktion $f : X \to Y$ zwischen zwei metrischen Räumen (X, d_X) und (Y, d_Y) gleichmäßig stetig?

   (b) Erklären Sie, warum die stetige Funktion $f :]0, \infty[\to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{1}{x}$ nicht gleichmäßig stetig ist, indem Sie zu beliebig vorgegebenem $\delta > 0$ zwei Punkte $x_1, x_2 > 0$ angeben mit $|x_1 - x_2| < \delta$ und $|f(x_1) - f(x_2)| \geq 1 =: \varepsilon$.

   (c) Seien (X, d_X) und (Y, d_Y) metrische Räume, $f : X \to Y$ gleichmäßig stetig und $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in X. Zeigen Sie, dass dann $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in Y ist.

   (d) Definiert man die Funktion $f_0 : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$, $f_0(x) := a^x$ für $a > 0$ und $x \in \mathbb{Q}$ wie in der Vorlesung, so zeigt man relativ leicht, dass f_0 auf jedem rationalen Intervall $[\alpha, \beta] \cap \mathbb{Q}$ gleichmäßig stetig ist. Ein beliebiges (nicht notwendig rationales) $x \in [\alpha, \beta]$ lässt sich als $x = \lim_{n\to\infty} x_n$ mit $x_n \in [\alpha, \beta] \cap \mathbb{Q}$ schreiben. Folglich ist (c) anwendbar, und man erhält wegen der Vollständigkeit von $\mathbb{R}$ einen Grenzwert $f(x) = a^x := \lim_{n\to\infty} a^{x_n}$. Weil sich dieser Grenzwert als unabhängig von der speziellen Wahl der gegen x konvergenten Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ erweist, ist somit die global stetige Exponentialfunktion $f = \exp_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto a^x$ zur Basis a eindeutig definiert.

   Angenommen die Rechenregel $a^{x+y} = a^x a^y$ sei bereits für alle $x, y \in \mathbb{Q}$ gesichert. Wie lässt sich diese Regel auf alle $x, y \in \mathbb{R}$ ausdehnen? Anleitung: Man betrachte die stetigen Funktionen $g_1(x, y) := a^{x+y}$ und $g_2(x, y) := a^x a^y$.

   (e) Es sei bekannt, dass die Funktion $\exp_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto a^x$, an der Stelle 0 differenzierbar ist. Zeigen Sie unter Verwendung von (d), dass $\exp_a$ dann sogar an einem beliebigen Punkt $x_0 \in \mathbb{R}$ die Ableitung $\exp_a'(x_0) = \exp_a(x_0) \exp_a'(0)$ hat.

3. Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, $a \leq b$, Riemann-integrierbar und $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ definiert durch $F(x) := \int_a^x f(t)\, dt$.

   (a) Es gelte $\alpha \leq f(x) \leq \beta$ für alle $x \in [a, b]$. Betrachten Sie die (triviale) Zerlegung $Z = \{a = x_0 < b = x_1\}$ und die zugehörigen Riemannschen Ober- und Untersummen $O(f, Z)$ und $U(f, Z)$. Begründen Sie unter Verwendung der Definition des Riemann-Integrals die Ungleichung $\alpha(b - a) \leq \int_a^b f(x)\, dx \leq \beta(b - a)$.

   (b) Sei $\varepsilon > 0$ beliebig vorgegeben und $x_0 \in]a, b[$. Unter welcher Voraussetzung an f lassen sich unter Verwendung von (a) eine Umgebung U von x_0 und ein Intervall I der Länge $\leq \varepsilon$, welches $f(x_0)$ enthält, finden derart, dass $\frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0} \in I$ für alle $x \in U$.

   (c) Formulieren Sie eine Version des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung, die man aus (b) ablesen kann.

   (d) Seien F_1 und F_2 Stammfunktionen von f. Wie lässt sich mit Hilfe des Mittelwertsatzes zeigen, dass es ein $c \in \mathbb{R}$ gibt, so dass für alle $x \in D$ gilt: $F_2(x) = F_1(x) + c$?

   (e) Erklären Sie, wie die Beziehung $\int_0^1 x^2\, dx = \frac{1}{3}$ aus (c) und (d) folgt.