Analysis 2 für Lehramt, Prüfung am 25.1.2013 (Winkler)

Name, Matrikelnummer:

Mündliche Prüfung nach individueller Vereinbarung

Hinweise bevor Sie beginnen:

1. Die einzelnen Teilfragen haben ungefähr gleiches Gewicht.
2. Ihre Arbeitszeit beträgt 100 Minuten.
3. Die einzelnen Teile jeder Aufgabe hängen zusammen. Dies schafft nicht nur vereinzelte Abhängigkeiten, sondern ist oft auch als Hilfe gedacht.

1. (a) Sei $f : D \to \mathbb{R}$, D kompakt. Angenommen, es gibt zu jedem $n \in \mathbb{N}$ ein $x_n \in D$ mit $|f(x_n)| > n$. Nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß gibt es dann gewisse $n_0 < n_1 < n_2 < \ldots$ derart, dass der Grenzwert $x = \lim_{k\to\infty} x_{n_k}$ existiert und in D liegt. Begründen Sie, warum f an der Stelle x unstetig ist.
   (b) Zeigen Sie: Eine reellwertige stetige Funktion ist auf jeder kompakten Menge beschränkt.
   (c) Wie lautet der Satz vom Maximum?
   (d) Sei $g : X \to Y$ stetig und surjektiv, X kompakt, $O_i \subseteq Y$ für alle $i \in I$ offen mit $\bigcup_{i\in I} O_i = Y$. Argumentieren Sie, warum es eine endliche Teilmenge $E \subseteq I$ gibt mit $\bigcup_{i\in E} O_i = Y$, was beweist, dass stetige Bilder kompakter Mengen wieder kompakt sind.
   (e) Begründen Sie den Satz vom Maximum.

2. Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, $x_0 \in [a, b]$.
   (a) Wann nennt man x_0 Stelle eines lokalen Maximums von f? (Achtung, f muss nicht differenzierbar sein!)
   (b) Was bedeutet Differenzierbarkeit von f in x_0 explizit?
   (c) Sei $f'(x_0) > 0$ und $a < x_0 < b$. Beweisen Sie die Existenz eines $\delta > 0$ mit $f(x) > f(x_0)$ für alle x mit $x_0 < x < x_0 + \delta$.
   (d) Formulieren Sie drei analoge Aussagen zu der in (c) zu beweisenden in Hinblick auf (e).
   (e) Aufgaben (c) und (d) beweisen einen Satz, der eine Bedingung (notwendig und/oder hinreichend?) für das Vorliegen eines lokalen Extremums einer reellen Funktion an einer gewissen Stelle formuliert. Wie lautet dieser Satz genau?

3. (a) Für $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gebe es Zahlen $a_n \in \mathbb{R}$ derart, dass $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Wie lassen sich mit Hilfe der Differentialrechnung die a_n aus f bestimmen?
   (b) Gibt es eine analytische Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f^{(n)}(0) = (n!)^2$ für alle $n \in \mathbb{N}$? (Begründung)
   (c) Warum ist die Funktion $f(x) := x^{x^x}$ auf $]0, \infty[$ analytisch? (Hinweis: Behandeln Sie zuerst $g(x) := x^x$ und verwenden Sie die Analytizität des natürlichen Logarithmus.)
   (d) Warum ist die Funktion f aus (c) auf jedem Intervall $[a, b]$ mit $0 < a < b < \infty$ Riemann-integrierbar?
   (e) Wegen (d) ist für f aus (c) und jedes $a > 0$ die Funktion $F_a : [a, \infty[\to \mathbb{R}$, $F_a(x) := \int_a^x f(t)\,dt$, definiert. Geben Sie $F_a'(x)$ für $a < x$ an.