Analysis 3 für Lehramt, schriftliche Prüfung am 1.2.2010, Winkler

Name, Matrikelnummer:

Mündliche Prüfung vereinbart für:

Hinweise, bevor Sie beginnen:

- Rückseite nicht vergessen!
- Innerhalb jeder der drei Aufgaben ist die angegebene Reihenfolge der Teilfragen empfehlenswert, muss aber nicht eingehalten werden.
- Die einzelnen Teilfragen haben ungefähr gleiches Gewicht.
- Ihre Arbeitszeit beträgt 100 Minuten.

1. Für beliebige aber feste reelle Zahlen $\alpha, \beta > 0$ sei die reellwertige Funktion $f = f_{\alpha,\beta}$ auf $D_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ x \geq 0, y \geq 0\}$ definiert durch $f(x, y) = x^\alpha y^\beta$, $g : \mathbb{R}^2 \supseteq D_g \to \mathbb{R}$ sei nicht näher spezifiziert.

   (a) Definieren Sie allgemein, wie die partielle Ableitung $\frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0)$ einer Funktion $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert ist.

   (b) Definieren Sie allgemein, wie die Ableitung $g'(x_0, y_0)$, (x_0, y_0) innerer Punkt von D_g, definiert ist.

   (c) Wie lässt sich $g'(x_0, y_0)$ berechnen?

   (d) Bestimmen Sie die partielle Ableitung $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ sofern vorhanden.

   (e) Für welche $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $x \geq 0$ und $y \geq 0$ existiert $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ wenigstens als einseitige Ableitung, für welche nicht?

   (f) Begründen Sie, warum f auf dem Viertelkreis $K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\} \cap D_f$ ein Maximum annimmt.

   (g) Geben Sie ein Gleichungssystem in den drei Variablen x, y, λ an, welches von einer Maximumsstelle (x, y) auf K wie in (f) erfüllt sein muss.

   (h) Bestimmen Sie alle solchen Maximumstellen.

2. Seien $a, b, c > 0$ und $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1\}$

   (a) Beschreiben Sie M verbal oder mittels Skizze.

(b) Geben Sie die Matrixdarstellung einer linearen Transformation $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ darart, dass für die volle dreidimensionale Einheitskugel B gilt $M = T(B)$.

(c) Wie erhält man $\lambda^{(3)}(M)$ unter Verwendung der Substitutionsregel aus (b) und $\lambda^{(3)}(B)$? Wie lautet das Ergebnis?

(d) Für $z \in \mathbb{R}$ sei $M_z = \{(x, y) : \ (x, y, z) \in M\}$. Nehmen Sie an, die Werte $\lambda^{(2)}(M_z)$, $z \in \mathbb{R}$, seien bekannt. Welche alternative Formel ergäbe sich daraus nach Fubini für $\lambda^{(3)}(M)$?

(e) Wie lautet der Satz von Fubini für eine stetige Funktion $f : [a, b] \times [c, d] \to \mathbb{R}$?

(f) Was versteht man unter dem Zählmaß auf einer Menge X?

(g) Welche Gestalt nimmt das Integral einer Funktion bezüglich des Zählmaßes an?

(h) Wie lautet der Satz von Fubini für Zählmaße? (Hinreichende Voraussetzung an f angeben.)

3. (a) Wann heißt ein metrischer Raum (X, d) vollständig?

(b) Bezeichne d_X die diskrete Metrik auf der Menge X, (d.h. $d_X(x, y) = 1$ für alle $x \neq y \in X$). Ist (X, d_X) immer vollständig?

(c) Geben Sie ein Beispiel für zwei Metriken d_1 und d_2 auf ein und derselben Menge X derart, dass (X, d_1) als metrischer Raum vollständig ist, (X, d_2) aber nicht.

Anleitung: Betrachten Sie irgendeine nicht abgeschlossene Teilmenge in einem metrischen Raum und verwenden Sie Ihre Antwort aus Teilfrage (b).

(d) Sei $1 \leq p < \infty$, μ ein Maß auf ein einer Menge X und $f \in \mathcal{L}^p(\mu)$. Wie ist $||f||_p$ definiert?

(e) Analog für $p = \infty$.

(f) Sei nun $X = [0, \infty)$ und μ das Lebesguemaß auf X. Stellen Sie eine 3×3-Tabelle auf, aus der hervorgeht, für welche $i = 1, 2, 3$ und für welche $p = 1, 2, \infty$ die Funktion f_i in $\mathcal{L}^p$ liegt. Dabei sei:
$f_1(x) = \sin x$
$f_2(x) = 1$ für $x < 1$ und $f_2(x) = \frac{1}{x}$ für $x \geq 1$
$f_3(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ für $0 < x < 1$ und $f_3(x) = 0$ für $x \geq 1$, $f_3(0) = 0$.

(g) Wie ist das Skalarprodukt $\langle f, g\rangle$ für Elemente f, g des Hilbertraumes $\mathcal{L}^2(\mu)$ definiert, und was ist ein Orthonormalsystem $B \subseteq \mathcal{L}^2(\mu)$?

(h) Sei V ein Hilbertraum, $x \in V$ und $B \subseteq V$ ein Orthonormalsystem. Wie lässt sich die Orthonormalprojektion x_B von x auf den Abschluss des von B erzeugten Unterraumes von V berechnen?