**Analysis 3 für Lehramt, Prüfung am 1.3.2013 (Winkler)**

Name, Matrikelnummer (bitte ausfüllen):

Vereinbarung der mündlichen Prüfung unmittelbar nach der schriftlichen

Hinweise bevor Sie beginnen:
Die einzelnen Teilfragen haben ungefähr gleiches Gewicht.
Ihre Arbeitszeit beträgt 100 Minuten.

Wir betrachten reellwertige Funktionen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ in zwei Variablen. Speziell sei $g(x, y) := \sin(x + y)\cos(x - y)$. Bezeichne $M_1$ die Menge aller $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ mit $g(x, y) = 1$, $M_{-1}$ die Menge aller $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ mit $g(x, y) = -1$ und $N_0$ die Menge aller $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, für die $g'(x, y) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ die (lineare) Nullfunktion ist.

1. Wie lautet die Definition der partiellen Ableitung $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ von $f$ nach der ersten Variablen an der Stelle $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$?
2. Berechnen Sie speziell $\frac{\partial g}{\partial x}$ an einer allgemein vorgegebenen Stelle $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$.
3. Die Ableitung $A = f'(x_0, y_0)$ von $f$ an der Stelle $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ ist eine lineare Abbildung $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Durch welche charakterisierende Eigenschaft ist $A$ definiert?
4. Angenommen, die Ableitung $f' : \mathbb{R}^2 \to L(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ (Raum linearer Funktionen) existiert. Was lässt sich über Existenz und Wert der partiellen Ableitungen von $\frac{\partial f}{\partial x}$ und $\frac{\partial f}{\partial y}$ sagen?
5. Als lineare Abbildung besitzt $g'(x_0, y_0)$ eine Darstellung als $1 \times 2$-Matrix $(a, b)$ derart, dass $g'(x_0, y_0) : (x, y) \mapsto ax + by$. Darin sind $a = a(x_0, y_0)$ und $b = b(x_0, y_0)$ Funktionsterme in $x_0, y_0$. Geben Sie diese beiden Terme an.
6. Geben Sie möglichst schwache hinreichende Bedingungen betreffend die partiellen Ableitungen von $f$ an, aus denen Sie möglichst starke Schlüsse betreffend $f'$ ziehen können.
7. Die Richtungsableitung $\frac{\partial f}{\partial v}(x_0, y_0)$ lässt sich als $\lim_{t\to 0} \frac{1}{t}(f((x_0, y_0) + tv) - f(x_0, y_0))$ definieren. Was setzt man über $v$ voraus, damit dieser Wert den Anstieg von $f$ an der Stelle $(x_0, y_0)$ in Richtung $v$ angibt?
8. Was würde sich ändern, wenn man auf die von Ihnen in 7. genannte Voraussetzung verzichtet?
9. Berechnen Sie die Richtungsableitung $\frac{\partial g}{\partial v}(0, 0)$ für einen allgemein vorgegebenen Richtungsvektor $v = (v_x, v_y)$.
10. Geben Sie das kleinste $p > 0$ (Periode) an mit $g(x, y) = g(x + p, y) = g(x, y + p)$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$.
11. Offensichtlich gilt $-1 \leq g(x, y) \leq 1$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$. Welche Inklusionen zwischen den Mengen $M_{-1}, M_1$ und $N_0$ können Sie behaupten, ohne die Mengen explizit zu bestimmen?
12. Geben Sie einen Punkt aus $M_{-1}$ explizit an.
13. Geben Sie einen Punkt aus $M_1$ explizit an.
14. Geben Sie einen Punkt aus $N_0$ explizit an.