Logischer und mengentheoretischer Formalismus — Ärgernis, und sonst nichts?

Reinhard Winkler (TU Wien)

Zusammenfassung

Beschränkt man im Mathematikunterricht die Einführung in Logik und Mengenlehre auf Formalismen wie das sture Ausfüllen von Wahrheitswertetabellen oder das Umschreiben einfacher Sachverhalte in Ausdrücke mit Mengenklammern, so wird unweigerlich die Frage nach dem *Wozu?* laut. Im vorliegenden Artikel versuche ich deutlich zu machen, dass all diese Dinge in einem viel größeren, geradezu philosophischen Kontext stehen. Erst dieser Kontext verleiht den Grundlagen der Mathematik ihre besondere Attraktivität. Außerdem gewinnen wir aus der Geschichte der Grundlagenforschung vor allem des späten 19. und des frühen 20. Jahrhunderts sehr universelle Einsichten in das Verhältnis von Sprache und Denken; Einsichten, die ohne Mathematik schlichtweg unzugänglich erscheinen. Rein technisch betrachtet berührt dieser Artikel etwa jene logischen und mengentheoretischen Grundbegriffe, die in den ersten Stunden einer Anfängervorlesung zur Sprache kommen; bis hin zu einer sehr knappen Andeutung der Konstruktion der Zahlenbereiche.

1 Einleitung

Sowohl im Schulunterricht als auch in Einführungsvorlesungen zu Beginn eines jeden Mathematikstudiums stellt sich unweigerlich die Frage, wie ausführlich auf Grundlagen einzugehen ist. Eine allgemeingültige Antwort gibt es wahrscheinlich nicht. Denn zu sehr polarisiert diese Frage zwischen jenen, die aus allgemeinen philosophischen Neigungen an Grundlagen ganz besonders interessiert sind, und extremen Pragmatikern, die keinen Sinn in scheinbar nutzlosen grundsätzlichen Überlegungen sehen. Zwei entgegengesetzte Gefahren lauern: auf der einen Seite Unreflektiertheit und intellektuelle Dürftigkeit bei völliger Ausblendung von Grundlagenfragen; auf der anderen Seite droht bei zu ausführlicher und möglichst vollständiger Behandlung derselben eine Überformalisierung, die zu viel Zeit in Anspruch nimmt und darüber hinaus den Blick auf die vielen anderen Aspekte der Mathematik verstellt. Trotz dieser allgegenwärtigen Gefahr besteht kein Zweifel daran, dass in einem mathematischen Fachstudium ein gewisses Ausmaß an begrifflichen und methodischen Grundlagen und auch an Formalismus unabdingbar ist, will man das unverzichtbare Werkzeug auf zeitgemäßem Niveau bereitstellen. Im Schulunterricht gilt dasselbe, wenn auch auf elementarerem Niveau. Grundlagen haben nicht nur Werkzeugcharakter, sondern sind von ganz speziellem intellektuellen Reiz. Entsprechend versuche ich im beschränkten Rahmen dieses Artikels sowohl das in technischer Hinsicht Allerwichtigste bereitzustellen, als auch durch mancherlei philosophisch angehauchte Erläuterungen Interesse zu wecken für mathematische Grundlagenfragen, die in einem Leben mit intellektuellem Anspruch eine eminente Rolle spielen können.

Der Artikel möchte als eine überblicksartige Zusammenfassung für Lehrerinnen und Lehrer ebenso brauchbar sein wie als Ergänzungsmaterial zu den einführenden Kapiteln einer mathematischen Grundvorlesung an der Universität. Ich beginne mit grundsätzlichen Bemerkungen zu Methode und Gegenstand der Mathematik, skizziere die vor allem sprachlichen Aspekte der mathematischen Logik (Aussagen- und Prädikatenlogik), beleuchte die Grundideen des Mengenbegriffs und zeige, wie er dazu taugt, allgegenwärtige Funktionsweisen unseres Denkens (nicht nur in der Mathematik) extrem luzide zu beschreiben.

2 Die Methode der Mathematik

2.1 Gegenstand versus Methode

Was ist Mathematik? — Für die meisten anderen Wissenschaften lässt sich die entsprechende Frage relativ leicht durch die Angabe ihres jeweiligen Gegenstandes beantworten. So könnte man etwa die Biologie definieren als die Lehre von den Lebewesen. Selbst wenn man sich damit nicht begnügt und nachfragt, was ein Lebewesen ist, werden einige Bestimmungsstücke für eine für (fast) alle Situationen zufriedenstellende Begriffsbestimmung ausreichen.

Die Mathematik stellt deshalb einen Sonderfall dar, weil erstens die Angabe ihres Gegenstandes nicht auf der Hand liegt und zweitens ihre Methode eine viel bestimmendere Rolle spielt als in anderen Disziplinen. Dennoch ein paar Orientierungshilfen (sicher keine letzgültige Antwort!) schon zu Beginn.

Der Gegenstand der Mathematik ist keineswegs durch die Aufzählung einiger Schlagworte wie *Zahlen, Geometrie, Differential- und Integralrechnung, algebraische Strukturen, Wahrscheinlichkeit und Statistik* etc. abgedeckt. Auch eine Verlängerung dieser Liste wird nie zu einem Ende kommen, weil laufend neue Gebiete in die Mathematik (und auch Schulmathematik) integriert werden.

Sinnvoller scheint mir eine Bestimmung des Gegenstandes der Mathematik, die davon ausgeht, dass Mathematik in sehr allgemeiner Weise versucht, Vorstellungen, also Bewusstseinszustände, zu präzisieren und systematisch zu untersuchen. Dies auf wenigen Seiten auszuführen, habe ich in [9] versucht. Doch ist dieser Zugang stark subjektiv gefärbt, für den Studienanfänger noch nicht leicht nachvollziehbar und erschließt sich wahrscheinlich erst nach und nach im Laufe eigenständiger mathematischer Tätigkeit.

Sehr wohl schon zu Studienbeginn unabdingbar ist ein erster Einblick in die mathematische Methode. Ein solcher ist eines der Hauptanliegen dieses Artikels. Wenigstens aus wissenschaftstheoretischer Sicht kann man nämlich durchaus den Standpunkt vertreten (obwohl ich persönlich nicht darauf beharre), dass Mathematik genau das ist, was sich mit der mathematischen, d.h. mit der logisch-deduktiven Methode, angewendet auf den mengentheoretischen Apparat, behandeln lässt.

Welcher philosophischen Position auch immer man zuneigt: Mit den wichtigsten Grundelementen von Logik und Mengenlehre müssen wir uns schon zu allem Anfang vertraut machen. Dies soll im Folgenden geschehen. Bei meinen Ausführungen lege ich großen Wert darauf, auch den Sinn rund um den formalen Apparat zu beleuchten. Denn besonders bei der Vermittlung von Mathematik halte ich nichts von einer Überbetonung des formalistischen Standpunktes. Denn dabei bleiben sowohl Phantasie als auch allgemeine intellektuelle Ansprüche sehr leicht auf der Strecke.

2.2 Mathematische und natürliche Sprache

Die mathematische Methode ist nicht zu trennen von der Sprache der Mathematik. Nimmt man es ganz genau, ist zwischen formaler oder wenigstens formalisierbarer Objekt- und i.a. schwer formalisierbarer Metasprache zu unterscheiden. Der gesamte bisherige Text war in einer Metasprache verfasst, d.h. in einer natürlichen Sprache, die sich nicht wesentlich von der Alltagssprache unterscheidet. Im Gegensatz dazu dient die Objektsprache maximaler Präzision. Diese Präzision zeigt sich daran, dass jeder sinnvollen Aussage in dieser Sprache eindeutig entweder der Wahrheitswert *wahr* oder der Wahrheitswert *falsch* zukommt. Man spricht deshalb von der *zweiwertigen* oder auch *klassischen Logik*.

Zum Beispiel haben die mathematischen Aussagen $2 + 2 = 4$ (wahr) und $2 + 2 = 5$ (falsch) eindeutige Wahrheitswerte und lassen sich als mathematische (objektsprachliche) Aussagen verwenden. Das gilt nicht für eine Aussage wie: *Ich fühle mich ziemlich wohl*, die sich nicht ohne weiteres in eine mathematische Objektsprache übersetzen lässt, auch wenn sich das Gebiet der *Fuzzy-Logik* mit der Mathematisierung solcher nur graduell zutreffender sprachlicher Äußerungen beschäftigt.

Mathematische wie generell wissenschaftliche Sprache soll also vor allem möglichst unmissverständlich Information vermitteln, während in der Alltagssprache eine geschmeidige Kommunikation noch wichtiger ist [1]. Präzision auch in allen zwar denkbaren, aber sehr unwahrscheinlichen Sonderfällen ist dagegen nachrangig. Dennoch reicht sehr oft auch die Alltagssprache aus, um mathematische Sachverhalte eindeutig auszudrücken. In der Mathematik ist es deshalb nicht Ziel, alle Aussagen zu formalisieren, sondern lediglich, alle Begriffe und Aussagen so präzise zu machen, dass sie prinzipiell formalisierbar sind. Die Fähigkeit zu formalisieren wie auch umgekehrt, formale Ausdrücke in die natürliche Sprache zu übersetzen, ist eines der Lehrziele in der Schule wie auch zu Beginn eines Fachstudiums. Formalisierung ist kein Selbstzweck, sondern ein notwendiges Werkzeug. Fortgeschrittene Mathematikerinnen und Mathematiker verwenden es vor allem dann, wenn Aussagen so kompliziert werden, dass sie in natürlicher Sprache zu unübersichtlich werden. Das grundsätzliche Verständnis all dieser sprachlichen Aspekte ist ein wesentliches Anliegen dieses Artikels.

Folgende grammatikalische Grundstruktur natürlicher Sprachen spiegelt sich auch in mathematischen Formalisierungen wider: Jeder Aussagesatz (wenigstens der deutschen Sprache) besitzt Subjekt und Prädikat, alle anderen Satzteile lassen sich als Ergänzungen interpretieren. Das Subjekt enthält als wichtigsten Bestandteil ein Nomen (Substantiv oder Pronomen). Dieses bezeichnet etwas (Person, Lebewesen, Gegenstand, Abstraktum o.ä.), worüber das Prädikat (mit einem Verbum oder einer Eigenschaft als wichtigstem Bestandteil) eine Aussage macht. Klassisches Beispiel von Aristoteles: *Sokrates ist ein Mensch.* Hier ist *Sokrates* das Subjekt, und *ist ein Mensch* das Prädikat.

Da sich von einem beliebigen Objekt/Lebewesen hinreichend zweifelsfrei feststellen lässt, ob es sich um einen Menschen handelt, taugt diese Aussage prinzipiell zur Formalisierung im Rahmen der Logik und zur Illustration ihrer Gesetze. Bevor wir die sprachliche Struktur Subjekt/Prädikat unter logischem und mathematischem Gesichtspunkt genauer untersuchen, sind aber noch ein paar allgemeinere methodische Bemerkungen angebracht.

2.3 Die logisch-deduktive (axiomatische) Methode

Die Erfindung der mathematischen, d.h. der *logisch-deduktiven* oder auch *axiomatischen Methode* verdanken wir der klassischen griechischen Antike. Exemplarisch zusammengefasst finden wir den damaligen Stand des mathematischen Denkens im durch Jahrtausende maßgeblichen Lehrbuch, den *Elementen* des Euklid (ca. 365 bis 300 v.Chr.). Die axiomatisch-deduktive Methode besteht darin, dass aus explizit formulierten allgemeinen Prinzipien (*Axiomen*) unter Verwendung von präzisen *Definitionen* logisch notwendige Konsequenzen gezogen werden, die als *Sätze* oder *Theoreme* formuliert werden. Auch jedes *Lemma (Hilfssatz)* und jedes *Korollar (Folgerung)* ist grundsätzlich ein Theorem; die alternative Bezeichnung soll nur andeuten, dass es im Kontext eines anderen, vielleicht noch interessanteren Theorems zu sehen ist, dem es vorangeht bzw. nachfolgt.

In der Antike wurden Axiome als unumstößliche, geradezu metaphysische Wahrheiten angesehen, an denen nicht zu rütteln ist. Einen derartigen Anspruch erhebt die moderne Mathematik nicht. Axiome spielen eher die Rolle impliziter Definitionen. So wird beispielsweise durch die Gruppenaxiome definiert, was eine Gruppe ist; keinesfalls aber wird behauptet, dass alles eine Gruppe sei.

Eine Argumentationskette, die zeigt, dass eine gewisse Aussage aus den Axiomen und bereits abgesicherten Theoremen denknotwendig (und nicht nur erfahrungsgemäß) folgt und somit selbst ein Theorem ist, ist ein (mathematischer) *Beweis*. Was genau als Beweis akzeptiert wird und was nicht, behandelt die Beweistheorie, ein Teilgebiet der mathematischen Logik. Ohne Beweistheorie im eigentlichen Sinn betreiben zu wollen, seien im Folgenden die wichtigsten Aspekte von Aussagen- und Prädikatenlogik besprochen. Eine für ein Mathematikstudium hinreichende Begabung zeigt sich üblicherweise daran, dass sich schon in den Einführungsvorlesungen sehr schnell eine intuitive Sicherheit einstellt, was ein Beweis ist. Wer die Sache ganz genau wissen will, möge

[1] Für Sprache mit literarischem Anspruch kommen noch viele weitere Qualitätsmerkmale hinzu.

Lehrveranstaltungen oder Literatur zur Mathematischen Logik (ein sehr umfassender Klassiker ist [6]) zu Rate ziehen. Für den mathematischen Alltag aber sollten — eine gewisse mathematische Begabung vorausgesetzt — die Erläuterungen in diesem Artikel ausreichen.

Unter einer *Theorie* verstehen wir schließlich die Gesamtheit ihrer Axiome, Definitionen und Theoreme samt Beweisen. Anders als in der Alltagssprache, wo das Wort *Theorie* oft etwas Hypothetisches, noch nicht Gesichertes bezeichnet, sind *mathematische Theorien* also im höchsten Maße sicher: Alles, was den Axiomen und Definitionen entspricht, erfüllt mit absoluter Sicherheit auch die Theoreme der Theorie.

Im Gegensatz zur logisch-deduktiven Methode, die vom Allgemeinen (Axiom) zum Besonderen (Theorem) voranschreitet, steht die *induktive Methode*, die allen empirischen Wissenschaften zugrundeliegt. Dabei versucht man, aus zahlreichen und möglicherweise sehr vielfältigen einzelnen Beobachtungen und Experimenten allgemeine Prinzipien herauszulesen. Berühmtes Beispiel: Newton erkannte, dass sowohl der vom Baum herabfallende Apfel, als auch die ellipsenförmigen Planetenbahnen demselben allgemeinen Gesetz gehorchen, das er als Gravitationsgesetz formulierte.

3 Logik — die Grammatik der mathematischen Sprache

3.1 Aussagenlogik

In der Aussagenlogik geht es darum, gegebene Aussagen $A, B, C, \ldots$ (mit jeweils eindeutigem Wahrheitswert) zu komplizierteren zu verknüpfen. Dabei ist der Wahrheitswert der neuen Aussage in eindeutiger Weise durch die Wahrheitswerte der Einzelaussagen festgelegt. Die wichtigsten Beispiele ergeben sich durch Verwendung der sogenannten *Junktoren* $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow$ und $\leftrightarrow$. Die Aussage $\neg A$ (*Negation*) ist wahr, wenn A falsch ist und umgekehrt. $A \wedge B$ (*A und B, Konjunktion*) ist wahr, wenn beide Teilaussagen, sowohl A als auch B, wahr sind. $A \vee B$ (*A oder B, Disjunktion*) ist wahr, wenn wenigstens eine der beiden Teilaussagen A oder B wahr ist, möglicherweise beide. Die *Implikation* $A \rightarrow B$ ist nur dann falsch, wenn A wahr ist, B aber falsch; in allen anderen Fällen wahr. Und die *Äquivalenz* $A \leftrightarrow B$ ist wahr, wenn A und B denselben Wahrheitswert haben (wahr oder falsch). Übersichtlicher ist die Darstellung in einer Wahrheitswertetabelle, wobei w für *wahr*, f für *falsch* steht:

A	$\neg A$
w	f
f	w

A	B	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \rightarrow B$	$A \leftrightarrow B$
w	w	w	w	w	w
w	f	f	w	f	f
f	w	f	w	w	f
f	f	f	f	w	w

Eine kurze Erläuterung verdient der Wahrheitswert w in der dritten Zeile unter der Implikation $A \rightarrow B$. Damit wird ausgedrückt, dass bei falscher Prämisse in einer Implikation über die Schlussfolgerung gar nichts ausgesagt wird, letztere kann also durchaus wahr sein. Diese formale Festlegung ist unabhängig von kausalen Zusammenhängen, wie sie in den Naturwissenschaften vorherrschen. In der Mathematik dagegen geht es nicht um Ursache und Wirkung, sondern um Denkgesetze von logischer Notwendigkeit.

Eine aussagenlogische Formel heißt *Tautologie* oder *allgemeingültig*, wenn sie für alle möglichen Belegungen der Einzelaussagen mit Wahrheitswerten selbst stets den Wahrheitswert w hat. So eine Aussage, die immer wahr ist, sei mit $\top$ abgekürzt, ihre Negation mit $\perp$. Wichtige Beispiele von Tautologien sind: $A \vee \neg A$ (tertium non datur), $\neg(A \wedge \neg A)$ (Satz vom Widerspruch), $A \leftrightarrow \neg\neg A$ (doppelte Verneinung), $\perp \rightarrow A$ (ex falso quodlibet), $A \rightarrow \top$ (verum ex quodlibet), $(A \rightarrow B) \leftrightarrow (\neg A \vee B)$ (Umschreibung der Implikation durch die Disjunktion), $(A \leftrightarrow B) \leftrightarrow ((A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A))$ (Umschreibung der Äquivalenz durch Implikation und Konjunktion), $\neg(A \wedge B) \leftrightarrow (\neg A \vee \neg B)$ (erstes de Morgansches Gesetz), $\neg(A \vee B) \leftrightarrow (\neg A \wedge \neg B)$ (zweites de Morgansches Gesetz), $(A \rightarrow B) \leftrightarrow (\neg B \rightarrow \neg A)$ (Kontraposition), $A \vee (B \wedge C) \leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C)$ (erstes Distributivgesetz), etc.

Mittels Wahrheitswertetabelle überprüft man für all diese Aussagen, dass für alle vier (im letzten Beispiel acht) möglichen Belegungen der Aussagen A, B (im letzten Beispiel A, B, C) mit den Wahrheitswerten w und f die Gesamtaussage den Wahrheitswert w bekommt. Mit dieser einfachen Methode liegt ein Entscheidungsverfahren vor, mit welchem man eine beliebige aussagenlogische Formel auf Allgemeingültigkeit überprüfen kann.

Ein mathematischer Beweisschritt in aussagenlogischem Kontext kann zum Beispiel folgende Struktur haben. Sind A und $A \to B$ Aussagen, von denen man bereits weiß, dass sie wahr sind, so ist, wie eine Analyse der Wahrheitswerte zeigt, für die Aussage B nur der Wahrheitswert w möglich. Also folgt aus A und $A \to B$ die Aussage B, mit der man nun weiterarbeiten kann. Diese Schlussfigur heißt *modus ponens* und spielt in den meisten Formalisierungen der Logik eine wichtige Rolle als Ableitungsregel. Dennoch ist damit noch nicht alles geklärt, was wir brauchen.

3.2 Prädikatenlogik

Zur Illustration greife ich als Beispiel nochmals einen der auf Aristoteles zurückgehenden sogenannten *Syllogismen* auf: *Sokrates ist ein Mensch. Alle Menschen sind sterblich. Also ist Sokrates sterblich.*

Trotz der Ähnlichkeit ordnet sich diese Schlussfigur nicht dem modus ponens unter, wie ich ihn oben formuliert habe. Eine Formalisierung muss nämlich die innere Struktur der involvierten Aussagen berücksichtigen. Anstatt die Aussage *Sokrates ist ein Mensch* als atomaren Bestandteil A zu behandeln, führen wir die zusammengesetzte Schreibweise $M(x)$ ein, welche bedeuten soll, dass das Objekt x die Eigenschaft M hat, im Beispiel: ein Mensch zu sein. M heißt in diesem Zusammenhang auch *Prädikat*. In der zweiten Prämisse (*Alle Menschen sind sterblich*) tritt ein zweites Prädikat auf, nämlich sterblich zu sein, schreiben wir dafür S. In der Formalisierung dieser Prämisse muss auch noch das Wörtchen *alle* berücksichtigt werden, wofür sich das Symbol $\forall$ eingebürgert hat, der sogenannte *Allquantor*. Eine übliche Formalisierung lautet: $\forall x: \ (M(x) \to S(x))$, ausführlich in Worten: Für jedes x gilt, dass wenn x ein Mensch ist, x notwendig auch sterblich ist. Zusammen mit der Voraussetzung, dass Sokrates ein Mensch ist, folgt damit, dass Sokrates sterblich ist. Dieser Schluss ist logisch ebenso zwingend, wie der weiter oben behandelte modus ponens. Man kann auch sagen:

$$((\forall x: \ (M(x) \to S(x))) \land M(a)) \to S(a)$$

ist *logisch allgemeingültig.*

Man kann eine Allaussage $\forall x : P(x)$ auch auf jene Objekte x einschränken, die eine gewisse Eigenschaft E besitzen, indem man $\forall x: \ E(x) \to P(x)$ schreibt. Oft bevorzugt man für solche bedingten Allaussagen Abkürzungen wie zum Beispiel: $\forall x > 0 \ \exists y: \ y^2 = x$ für: *Jede positive Zahl lässt sich als Quadrat schreiben* (eine Aussage, die in den reellen Zahlen wahr ist). Eine Besonderheit besteht darin, dass bedingte Allaussagen, bei denen $E(x)$ auf überhaupt kein x zutrifft, immer wahr sind, weil dann die Implikation $E(x) \to P(x)$ unabhängig von $P(x)$ immer den Wahrheitswert w annimmt. (Man vergleiche dazu das Prinzip *ex falso quodlibet* aus der Aussagenlogik.)

Wichtig zu erwähnen ist noch der *Existenzquantor* $\exists$. Die Formel $\exists x : P(x)$ bedeutet in der natürlichen Sprache: Es gibt (mindestens) ein Objekt x, auf welches das Prädikat P zutrifft. Man könnte diese Aussage auch durch $\neg(\forall x: \ \neg P(x))$ formalisieren, was wörtlich bedeutet: *Nicht für alle x ist es der Fall, dass auf x das Prädikat P nicht zutrifft.* Offenbar wird dadurch tatsächlich ausgedrückt, dass P auf wenigstens ein x zutreffen muss. Dieser Überlegung entspricht die logische Allgemeingültigkeit der Formel

$$(\exists x : P(x)) \leftrightarrow (\neg(\forall x : \neg P(x))).$$

Will man ausdrücken, dass es genau ein (und nicht mehrere) x mit $P(x)$ gibt, schreibt man manchmal auch $\exists!\, x : P(x)$. Man kann aber auch das zum Grundbestand logischer Symbolik gehörende Gleichheitszeichen $=$ verwenden:

$$\exists x : (P(x) \land (\forall y: \ P(y) \to x = y)$$

All- und Existenzquantor lassen sich auch deuten als große Konjunktion bzw. Disjunktion, wobei nicht nur zwei Aussagen verknüpft werden, sondern möglicherweise unendlich viele, je nachdem wie viele Werte die Variable beim Quantor annehmen kann.

Das Verständnis dieser Symbolik ist mehr als eine formalistische Marotte, denn die Struktur prädikatenlogischer Formeln bildet den Kern mathematischen Denkens ab. Erst wer den Formalismus verstanden hat, darf (ja soll) sich Großzügigkeit in seiner Handhabung erlauben und je nach Neigung wieder weitgehend auf Formalisierung verzichten.

3.3 Von Aristoteles bis Gödel

Unsere bisher gewonnenen Einsichten in die Logik gehen, abgesehen von Äußerlichkeiten in der Symbolik, kaum über das hinaus, was schon Aristoteles (384-322 v. Chr.) selbstverständlich war. Für die moderne Mathematik reicht das beinahe aus; bis auf eine scheinbar kleine aber wesentliche Erweiterung. Ich will sie am Beispiel des Grenzwertbegriffs deutlich machen, der mit gutem Recht als der Kern der mathematischen Analysis angesehen werden darf. Nach dem Induktionsprinzip für die natürlichen Zahlen stellt er den zweiten großen Triumph der Mathematik im Ringen um die Unendlichkeit dar. Da es mir hier nur um eine Illustration geht, darf ich zurückgreifen auf die Schulmathematik bzw. vorgreifen auf ein frühes Kapitel in jeder Analysisvorlesung.

Die logisch hieb- und stichfeste Formulierung dafür, dass eine Folge reeller Zahlen $x_1, x_2, \ldots$ gegen einen Grenzwert x konvergiert, lautet: Egal wie klein die positive Toleranz ε ist, die wir uns vorgeben: ab einem geeigneten Index n_0 werden alle Folgenglieder einen Abstand von x haben, der kleiner als ε ist. In formaler Schreibweise:

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists n_0 \; \forall n \geq n_0 : \; |x_n - x| < \varepsilon$$

Sehen wir zunächst davon ab, dass in dieser Formel mathematische, d.h. nicht rein logische Elemente vorkommen wie größer-kleiner, Absolutbetrag, Subtraktion und Folgennotation mit Indizes. Dann fällt als grobes Skelett die Struktur $\forall \; \exists \; \forall \; P(x_n, x, \varepsilon)$ auf. Dabei steht $P(y, x, \varepsilon)$ für die Aussage $|y - x| < \varepsilon$, die offenbar von x, y und ε abhängt, also von drei Werten. So aufgefasst ist P ein *dreistelliges* Prädikat. Die Variablen n und ε werden, wie man sagt, durch Quantoren *gebunden*, während x *frei* vorkommt bzw. hier als Konstante (nämlich als der vorliegende Grenzwert der Folge) aufzufassen ist, wie auch — genau genommen — die gegebene Folge aller x_n. Allgemein erhält eine prädikatenlogische Formel erst dann einen Wahrheitswert, wenn man alle freien Variablen mit bestimmten Werten belegt oder durch Quantoren bindet. (Allerdings sieht man freie Variable oft als durch Allquantoren gebunden an und liest die Formeln entsprechend als Allaussagen.) Die Erweiterung der formalen Sprache um mehrstellige Prädikate stellte den letzten notwendigen Schritt dar, um das logische Schließen in der Mathematik zufriedenstellend zu beschreiben. Die entscheidende Rolle der Mehrstelligkeit wurde erst vor etwa 100 Jahren klar erkannt.

Noch eine Bemerkung zur Grenzwertdefinition. Die drei abwechselnden Quantoren $\forall \; \exists \; \forall$ am Anfang der Formel für den Grenzwert machen die Sache einigermaßen verwickelt. Diese Verwicklung ist grundsätzlich nicht zu vermeiden und repräsentiert ziemlich exakt das, was an der Mathematik als schwierig empfunden wird. Was Klarheit von Begriffen und Ausdrucksweise betrifft, stehen der Mathematik manch andere Disziplinen wie etwa die Jurisprudenz kaum nach. Hinsichtlich der Komplexität im quantorenlogischen Sinn treibt die Mathematik aber viel verwickeltere Blüten als alle anderen Wissensbereiche. Sowohl von seiner inhaltlichen Wichtigkeit vor allem in der Analysis als auch weil die logische Struktur so repäsentativ für die Mathematik überhaupt ist, stelle ich die These zur Diskussion: Mathematiker ist, wer den Grenzwertbegriff verstanden hat und mit ihm sinnvoll umgehen kann.

Als Übung zum Aufwärmen wollen wir uns den Unterschied klar machen zwischen den Formeln $\forall x \; \exists y : P(x, y)$ (Formel A) und $\exists y \; \forall x : P(x, y)$ (Formel B). Dass A und B nicht äquivalent sind, wird deutlich, wenn wir für $P(x, y)$ zum Beispiel die Formel $x < y$ setzen. Dann ist Formel A wahr (denn zu jeder Zahl x gibt es eine größere Zahl y), die Formel B jedoch falsch (sie behauptet nämlich die Existenz eines y, das größer ist als alle x). Jedoch ist die Implikation $B \to A$, ausführlich

$$(\exists y \; \forall x : P(x, y)) \to (\forall x \; \exists y : \; P(x, y)),$$

logisch allgemeingültig, nicht jedoch $A \to B$.

Eine allgemeine und rigorose Definition, wann eine Formel logisch allgemeingültig ist, würde hier zu weit führen. Erwähnenswert ist aber, dass so eine Definition nicht nur möglich ist, sondern dass sich damit sogar präzise beweisen lässt, dass korrektes logisches Schließen vollständig formalisierbar ist. Das entsprechende Theorem ist als *Vollständigkeitssatz der Prädikatenlogik* bekannt und wurde erstmals 1929 von Kurt Gödel in seiner Dissertation bewiesen. Sinngemäß besagt es, dass man ein Computerprogramm schreiben könnte, das nach und nach genau die logisch allgemeingültigen Formeln produziert. Allerdings wird dieses Programm nie fertig. Zu einer gegebenen Formel, die vom Programm ebensowenig als allgemeingültig nachgewiesen ist wie ihre Negation, könnte man also i.a. nicht entscheiden, ob sie tatsächlich nicht allgemeingültig ist, oder ob sie nur noch nicht an der Reihe war. Diese prinzipielle Ungewissheit steht im Gegensatz zur Situation bei der Aussagenlogik mit ihrem auf simplen Wahrheitswertetabellen basierenden Entscheidungsverfahren.

Dennoch: Die mathematische Logik, gewissermaßen als Grammatik der mathematischen Sprache, ist in den hier für uns wichtigsten Aspekten durch das Bisherige zufriedenstellend abgehandelt. Woran wir noch Mangel haben, sind Objekte, über die es lohnt, in dieser Sprache zu sprechen. Es hat sich herausgestellt, dass Mengen als solche Objekte ungeahnt weitreichende Möglichkeiten eröffnen, weil man allein mit ihnen (fast) die gesamte Mathematik erschließen kann.

4 Mengen — die Grundbausteine der Mathematik

4.1 Die Sparsamkeit der Mengenlehre

Warum eignen sich Mengen besonders gut als Grundbausteine der Mathematik? Um das zu verstehen, sind drei Fragen von Interesse:

1. Was sind Mengen?
2. Was können Mengen?
3. Können wir alles nicht billiger haben?

Auf die erste Frage kann man ganz im Sinne der axiomatischen Methode antworten: Was genau unter einer Menge zu verstehen ist, wird implizit durch Axiome beschrieben. Darauf werde ich im nachfolgenden Abschnitt etwas näher eingehen. An dieser Stelle ist es aber sinnvoller, an die Intuition zu appellieren. Georg Cantor (1845-1918), der Begründer der Mengenlehre formulierte: *Unter einer Menge verstehen wir jede Zusammenfassung M von bestimmten wohlunterschiedenen Objekten unserer Anschauung oder unseres Denkens (welche die Elemente von M genannt werden) zu einem Ganzen.* Ist x ein Element von M, so schreiben wir $x \in M$, andernfalls $x \notin M$. Bei einer Menge kommt es nur darauf an, welche Elemente sie besitzt. Daraus allein ergibt sich alles, was über die Menge ausgesagt werden kann. Entsprechend ändert es an einer Menge nichts, wenn ein Element mehrmals angeführt ist: $\{a, a\} = \{a\}$. Wichtig für die Grundlagen der Mathematik ist, dass ein Element $a \in M$ selbst eine Menge sein kann. Der Witz der mengentheoretischen Fundierung der Mathematik besteht zu einem guten Teil darin, dass auch dann alles bestens funktioniert, wenn im gesamten mathematischen Universum überhaupt nur Mengen vorkommen.

Hieraus ergibt sich auch eine Antwort auf die zweite Frage: Der Mengenbegriff ist unglaublich mächtig, wenn es darum geht, auch extrem komplizierte Objekte zu modellieren. David Hilbert (1862-1943), unbestritten einer der größten Mathematiker überhaupt, sagte 1925 über die Mengenlehre: *Aus dem Paradies, das Cantor uns geschaffen hat, soll uns niemand vertreiben können.* Worin dieses Paradiesische der Mengenlehre besteht, werde ich an einigen fundamentalen Beispielen noch etwas genauer behandeln. Exemplarisch lässt sich das an der Konstruktion der Zahlenbereiche studieren, vgl. [2], [8] oder [5]. Entscheidend daran ist, dass der Bildung von Mengen kaum Grenzen gesetzt sind, wenigstens wenn man sich die Freiheit nimmt, zu beliebigen Prädikaten

(Eigenschaften) P die Menge $M = \{x : P(x)\}$ [2] aller x zu bilden, die die Eigenschaft P besitzen. Es soll also $x \in M$ genau dann gelten, wenn $P(x)$ zutrifft. Zwar werden wir im nächsten Abschnitt sehen, dass es ganz so freizügig nicht funktioniert. Doch bleiben die Spielräume groß genug, dass wir im Cantorschen Paradies ohne große Unannehmlichkeiten werden verweilen können.

Dass wir — und damit zur dritten Frage — nicht erwarten können, die gesamte Mathematik wesentlich einfacher aufbauen zu können als mit Hilfe von Mengen, lässt sich leicht plausibel machen: Die vorangegangenen Diskussionen haben gezeigt, dass einstellige Prädikate alleine zu wenig sind, um etwa den Grenzwertbegriff zu behandeln. Man wird also allerwenigstens ein zweistelliges Prädikat benötigen. In der Mengenlehre ist das die Elementschaft $\in$. Und mit weniger als einem einzigen Typ von Objekten (eben Mengen) kann wohl erst recht nichts möglich sein. In diesem Sinne verlangt die Mengenlehre also eine minimale Ausstattung, um auf Brauchbares hoffen zu lassen. Bevor wir daran gehen können, diese Hoffnung zu realisieren, müssen wir uns noch etwas genauer darüber verständigen, was mit Mengen erlaubt ist.

4.2 Axiomatische Mengenlehre

In Cantors Mengendefinition kommen Begriffe wie *Zusammenfassung* etc. vor, für die man auch Definitionen einfordern könnte. Abgesehen davon wirft Cantors Definition noch grundlegendere Probleme auf. Das wurde spätestens Anfang des 20. Jahrhunderts schlagend, als Bertrand Russell (1872-1970) die Menge $R = \{x : x \notin x\}$ betrachtete, also die Menge aller Mengen, die sich selbst nicht als Element enthalten. Dieses Konzept ist in sich widersprüchlich: Ist die Aussage $R \in R$ wahr, so folgt nach Definition $R \notin R$, und umgekehrt; also in jedem Fall ein Widerspruch.

Die Konsequenz dieser sogenannten *Russellschen Antinomie* (oder auch *Paradoxon*) war die Axiomatisierung des Mengenbegriffs. Das gebräuchlichste Axiomensystem wird mit ZFC abgekürzt. Die ersten beiden Buchstaben stehen für die Mathematiker Zermelo und Fraenkel, C steht für *choice*, d.h. für das sogenannte Auswahlaxiom. Um glaubhaft zu machen, dass die Axiome von ZFC durchwegs sehr einfache Sachverhalte beschreiben, will ich sie samt kurzer, teilweise etwas ungenauer [3] inhaltlicher Beschreibung aufzählen:

Nullmengenaxiom (es gibt die leere Menge $\emptyset = \{\} = \{x : x \neq x\}$), **Extensionalitätsaxiom** (zwei Mengen sind genau dann gleich, wenn sie dieselben Elemente besitzen), **Paarmengenaxiom** (zu je zwei Mengen x, y gibt es die Menge $\{x, y\}$), **Potenzmengenaxiom** (zu jeder Menge existiert die Menge aller Teilmengen), **Vereinigungsmengenaxiom** (zu einer beliebigen Menge von Mengen gibt es die Vereinigungsmenge), **Unendlichkeitsaxiom** (es existiert eine Menge, welche die leere Menge als Element enthält und mit jeder Menge x auch die Nachfolgermenge $x \cup \{x\}$; jede solche Menge enthält ein Modell von $\mathbb{N}$), **Ersetzungsaxiom** (das funktionale Bild einer Menge ist selbst eine Menge), **Regularitätsaxiom** (jede Menge besitzt ein $\in$-minimales Element, das ist ein solches, das selbst keine anderen Elemente der Menge enthält; dieses Axiom ist ausschließlich in der Mengenlehre selbst relevant) und das **Auswahlaxiom** (zu jeder Menge aus nichtleeren Mengen ohne gemeinsame Elemente gibt es eine Auswahlmenge, die aus jeder genau ein Element enthält).

Tatsächlich ist bis heute kein Widerspruch etwa von der Art der Russellschen Antinomie aufgetreten, und kaum jemand hält einen solchen für möglich. Nicht zuletzt deshalb hat sich diese Liste von mengentheoretischen Axiomen im Laufe des 20. Jahrhunderts als allgemein anerkannter Rahmen für die Mathematik durchgesetzt.

Allerdings folgt aus Gödels Unvollständigkeitssatz (1931), dass wir grundsätzlich weder alle sinnvollen Fragen über ZFC oder über irgendein anderes vergleichbares System entscheiden, noch mit so einem System seine eigene Widerspruchsfreiheit beweisen können. Nach Vergleich von Vollständigkeits- und Unvollständigkeitssatz könnte man also überspitzt formulieren: Logisch korrektes Schließen können wir vollständig verstehen, die gesamte Mathematik aber werden wir nie überblicken.

[2] Alternativ zu dieser Standardnotation verwendet man manchmal auch die aufzählende Schreibweise, z.B. $\{a, b, c\}$ für die Menge mit den drei Elementen a, b und c.

[3] Eine präzise Formulierung findet sich in jedem Lehrbuch der Mengenlehre, z.B. in [4], aber auch in [6].

4.3 Mengenlehre als Prädikatenlogik zweiter Stufe

An der Mengenlehre bemerkenswert ist nicht nur ihre Rolle als tragfähige Basis für die gesamte Mathematik. Sie wirft auch ein neues Licht auf den Jahrtausende alten Universalienstreit in der abendländischen Philosophie. Dabei geht es vor allem um das Verhältnis zwischen konkreten Objekten und allgemeinen Begriffen. Mengen sind einerseits konkrete Objekte. Andererseits treten sie häufig als Vergegenständlichung eines Begriffs auf, nämlich als Menge jener Elemente, die unter diesen Begriff fallen. Mengen gehören also beiden Seiten an, der Welt des Konkreten und der des Allgemeinen, Abstrakten, und heben somit den grundsätzlichen Gegensatz dazwischen auf. Auf natürliche Sprache und Grammatik bezogen hieße das, dass Prädikate zu Subjekten werden können.

Überträgt man die Situation in die formale Logik, so gelangt man zu einer sogenannten *Prädikatenlogik zweiter Stufe*. Von der bisher behandelten Prädikatenlogik *erster Stufe* unterscheidet sie sich dadurch, dass sich logische Quantoren nicht nur auf Objekte beziehen können, sondern auch auf Prädikate. In solchen Logiken gilt allerdings kein Vollständigkeitssatz. Dies hängt auch mit der bereits erwähnten Unvollständigkeit von ZFC zusammen.

5 Grundfunktionen des Denkens — Grundlegende Konzepte der Mathematik

5.1 Vorbemerkung

In diesem Kapitel geht es darum, wie fundamentale Funktionen unseres Denkens mengentheoretisch modelliert werden können. Im Zuge der technischen Umsetzung ergeben sich grundlegende Konzepte der Mathematik, die in allen Teilgebieten eine mehr oder weniger zentrale Rolle spielen und das moderne mathematische Denken geradezu paradigmatisch prägen. Sie sind so fundamental, dass sie sogar dem Zahlbegriff vorgelagert sind, auch wenn das im elementaren Mathematikunterricht nicht immer explizit gemacht werden kann noch soll.

5.2 Einstellige Prädikate — Mengen

Eine Menge M kommt typischerweise dadurch zustande, dass man (meist aus einer bereits vorliegenden Grundgesamtheit) jene Elemente x zusammenfasst, die eine gewisse Eigenschaft haben, d.h. ein gewisses Prädikat P erfüllen, somit die Aussage $P(x)$ wahr machen: $M = \{x: \ P(x)\} = \{x: \ x \in M\}$. Der Verknüpfung mehrerer solcher Aussagen durch aussagenlogische Junktoren entsprechen Operationen bzw. Konstellationen der elementaren Mengenalgebra:

Konjunktion — Schnittmenge: $A \cap B = \{x: \ x \in A \wedge x \in B\}$. (Ist diese Menge leer, so heißen A und B *disjunkt*.)

Disjunktion — Vereinigungsmenge: $A \cup B = \{x: \ x \in A \vee x \in B\}$.

Negation — Differenzmenge: $A \setminus B = \{x: \ x \in A \wedge x \notin B\}$.

Implikation — Teilmenge: $A \subseteq B$, falls $x \in A \to x \in B$ für alle x. A heißt *Teil- oder Untermenge von* B, B heißt *Obermenge von* A.

Äquivalenz — Mengengleichheit: $A = B$, falls $x \in A \leftrightarrow x \in B$ für alle x.

Allquantor — große Schnitte: $\bigcap A = \{x: \ \forall a \in A: \ x \in a\}$ [4]. Hier ist A eine Menge von Mengen a. Ein Element x liegt im Schnitt $\bigcap A$ all dieser a, wenn x Element jedes einzelnen $a \in A$ ist. Oft denkt man sich die Elemente $a \in A$ als Mengen A_i, die mit Indizes i aus einer sogenannten *Indexmenge* I indiziert sind und schreibt für ihre Schnittmenge $\bigcap_{i \in I} A_i = \{x: \ \forall i \in I: \ x \in A_i\}$. Der wesentliche Unterschied zur gewöhnlichen Schnittmenge besteht

[4] Hier muss $A \neq \emptyset$ vorausgesetzt werden, damit $\bigcap A$ nicht zur Allklasse ausartet.

darin, das nicht nur zwei oder endlich viele, sondern beliebig viele Mengen geschnitten werden können.

Existenzquantor — große Vereinigungen: $\bigcup A = \{x : \exists a \in A : x \in a\}$ (dual zu den großen Schnitten). Wieder ist A eine Menge von Mengen a. Ein Element x liegt dann in der Vereinigung $\bigcup A$ all dieser a, wenn x Element wenigstens eines $a \in A$ ist. Alternative Notation mit einer Indexmenge: $\bigcup_{i \in I} A_i = \{x : \exists i \in I : x \in A_i\}$.

Aufgrund der engen Beziehung zwischen Logik und Mengenbildungen lassen sich aussagen- wie prädikatenlogische Gesetze in mengentheoretische Entsprechungen übersetzen. Als erstes Beispiel rufe ich an dieser Stelle nochmals das Prinzip *ex falso quodlibet* aus der Aussagenlogik in Erinnerung, dem die stets gültige Inklusion $\emptyset \subseteq A$ entspricht. Als zweites Beispiel erwähne ich eines der beiden großen Distributivgesetze $A \cap (\bigcup_{i \in I} B_i) = \bigcup_{i \in I}(A \cap B_i)$.

5.3 Mehrstellige Prädikate — Relationen

Wir haben Mengen kennengelernt als Vergegenständlichungen von Eigenschaften, d.h. von einstelligen Prädikaten P. Die Gültigkeit einer Aussage $P(a)$ übersetzt sich dabei in die Elementschaft $a \in \{x : P(x)\}$. Wie verhält es sich mit zwei- oder mehrstelligen Prädikaten wie $P(x, y)$?

Hier sind Mengen mit Elementen gefragt, die aus zwei Komponenten x und y bestehen, und zwar derart, dass die beiden Komponenten unter Beachtung ihrer Reihenfolge das Element eindeutig bestimmen. Man nennt solche Elemente *geordnete Paare* und schreibt dafür (x, y). Wesentlich für geordnete Paare ist, dass $(x_1, y_1) = (x_2, y_2)$ genau dann gilt, wenn sowohl $x_1 = x_2$ als auch $y_1 = y_2$. Hat man den Ehrgeiz, im Rahmen der Mengenlehre zu bleiben, kann man (x, y) zum Beispiel als die zweielementige Menge $\{\{x\}, \{x, y\}\}$ definieren. Diese Definition erfüllt die oben an einen Paarbegriff gestellte Forderung (Nachweis durch Fallunterscheidung $x = y$ bzw. $x \neq y$).

Sind zwei Mengen A und B gegeben, so fasst man sämtliche geordneten Paare (a, b) mit $a \in A$ und $b \in B$ zum sogenannten *kartesischen Produkt* zusammen, symbolisch $A \times B = \{(a, b) : a \in A \wedge b \in B\}$. Damit kann man auch $A \times B \times C = (A \times B) \times C$ etc. definieren. Für $A \times A$ schreibt man gern A^2 etc.

Es liegt auf der Hand, wie in diesem Rahmen mehrstellige Prädikate zu Mengen gemacht werden, nämlich als Teilmengen entsprechender kartesischer Produkte. Solche Mengen heißen *Relationen*, im Fall $R \subseteq A \times B$ zwischen den Mengen A und B. Oft schreibt man aRb statt $(a, b) \in R$. Beispiel: Die mathematische Relation *kleiner*, symbolisch $<$, fasst man als Menge aller Paare (x, y) auf, für die $x < y$ gilt. Wenn auch ungewohnt, so wäre es also formal korrekt, $(2, 3) \in <$ zu schreiben für $2 < 3$. Kommen beide Komponenten einer Relation aus derselben Menge $A = B$, so spricht man auch von einer *binären Relation* auf der Menge A.

5.4 Vergröberung, Klassifizierung — Äquivalenzrelation, Partition

Eine der wichtigsten Funktionen unseres Denkens besteht darin, Objekte nach gewissen Eigenschaften einzuteilen. In Analogie zur Polarität zwischen Objekten und Eigenschaften lässt sich dies von zwei Seiten betrachten. Entweder, indem wir ähnliche Objekte zu Klassen zusammenfassen; oder, indem wir das Ähnlichsein als binäre Relation auffassen. Beides lässt sich mengentheoretisch modellieren (als Partition bzw. als Äquivalenzrelation), und der Zusammenhang zwischen den beiden Sichtweisen lässt sich als mathematisches Theorem formulieren. All das will ich nun präzisieren.

Ist A eine beliebige Menge, so versteht man unter einer *Partition* oder *Klasseneinteilung* auf A eine Menge P von nichtleeren und paarweise disjunkten Teilmengen von A, deren Vereinigung ganz A ist. Die Elemente K von P heißen auch *(Äquivalenz-) Klassen* von P.

Eine *Äquivalenz(relation)* auf A ist eine binäre Relation R auf A mit folgenden drei Eigenschaften: *Reflexivität* (aRa für alle $a \in A$), *Transitivität* ($aRb \wedge bRc \to aRc$ für alle $a, b, c \in A$) und *Symmetrie* ($aRb \to bRa$ für alle $a, b \in A$). (Für Äquivalenzrelationen verwendet man oft Symbole wie $\sim, \approx, \cong, \equiv, \ldots$, die Ähnlichkeit suggerieren.)

Angesichts der einleitenden Motivation sollte es nicht überraschen, dass Partitionen und Äquivalenzrelationen im Wesentlichen dasselbe leisten. Eine mathematisch präzise Formulierung lautet wie folgt:

Ist P eine Partition auf A, dann erweist sich die Menge R_P aller $(a, b) \in A \times B$, für die a und b in derselben Klasse $K \in P$ liegen, als Äquivalenzrelation. Ist umgekehrt eine Äquivalenzrelation R auf A vorgegeben, so lässt sich zu jedem $a \in A$ die *Äquivalenzklasse* von a bilden, das ist die Menge $[a]_R$ aller $b \in A$ mit aRb. Je zwei Klassen erweisen sich als entweder disjunkt oder identisch, weshalb die Menge $P_R = A/R$ aller $[a]_R$ mit $a \in A$ eine Partition auf A ist. Außerdem sind die beiden Konstruktionen invers zueinander in dem Sinn, dass sie hintereinander ausgeführt zum ursprünglichen Objekt zurückführen: $R_{P_R} = R$ und $P_{R_P} = P$.

Der formale Beweis dieser Behauptungen erfordert keine speziellen Ideen, ist aber eine gute methodische Übung, die ich hier nicht ausführe.

5.5 Hierarchische Gliederungen — Ordnungsstrukturen

Ein anderes Prinzip der Strukturierung, das in unserem Denken eine große Rolle spielt, besteht in der Erstellung von Hierarchien der Über- und Unterordnung. Das kann auf einen einfachen Größenvergleich von numerischen Werten hinauslaufen oder auf ein kompliziertes Geflecht von Begriffen, die sich überschneiden können, einander umfassen etc.

Der gemeinsame mathematische Rahmen findet sich im Begriff der *Halbordnung*. Dabei handelt es sich um eine Menge H zusammen mit einer binären Relation $\leq$ (auch in allgemeineren Situationen sagt man dafür meistens *kleiner oder gleich*), die reflexiv, transitiv und antisymmetrisch ist. Die Wendung *zusammen mit* wird formalisiert, indem wir die Halbordnung als das geordnete Paar $(H, \leq)$ auffassen. Die Begriffe *Reflexivität* und *Transitivität* kennen wir schon von den Äquivalenzrelationen, *Antisymmetrie* bedeutet, dass $a \leq b$ und $b \leq a$ nur für $a = b$ möglich ist.

Die Interpretation dieser drei Eigenschaften liegt auf der Hand: Jedes Element ist kleiner gleich sich selbst (Reflexivität); ist a kleiner gleich b und b kleiner gleich c, dann ist erst recht a kleiner gleich c (Transitivität); und a kann nicht gleichzeitig kleiner und größer als b sein (Antisymmetrie). Ist $a \leq b$ und $a \neq b$, so schreibt man auch $a < b$ und spricht von *strenger*, *striker* oder *echter* Ungleichung. $a \geq b$ steht für $b \leq a$ und $a > b$ für $b < a$.

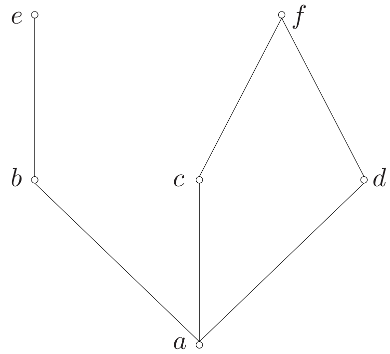
Ein typisches Beispiel einer Halbordnung ist eine *Mengenhalbordnung* $(H, \subseteq)$. Das bedeutet, dass H irgendeine Menge von Mengen ist, zum Beispiel die Potenzmenge, das ist die Menge aller Teilmengen einer Menge M. In der Tat ist die mengentheoretische Inklusion $\subseteq$ reflexiv, transitiv und antisymmetrisch.

Weiteres Beispiel einer Halbordnung: Ist H eine Menge bestehend aus (reellen) Zahlen und $\leq$ die gewöhliche kleiner-gleich-Beziehung, so liegt in $(H, \leq)$ ebenfalls eine Halbordnung vor, die keine Mengenhalbordnung ist. Dennoch werden wir im nächsten Abschnitt eine Sichtweise (genannt *Isomorphie*) kennenlernen, unter der jede Halbordnung so aussieht wie eine Mengenhalbordnung.

Doch nochmals zur Ordnung von Zahlen der Größe nach. Diese hat die bemerkenswerte Eigenschaft, dass für zwei gegebene Elemente a, b genau eine der drei Möglichkeiten $a < b$, $a = b$ oder $b < a$ eintritt. In so einem Fall spricht man auch von einer *linearen Ordung*, *Totalordnung* oder *Kette*. Für die Menge H aller Teilmengen einer mindestens zweielementigen Menge M ist $(H, \subseteq)$ keine Kette. Denn für $a \neq b \in M$ stehen $\{a\}$ und $\{b\}$ in keiner der Beziehungen $\subset$, $=$ oder $\supset$.

Im Zusammenhang mit Halbordnungen spielen einige weitere Begriffe in der Mathematik eine so wichtige Rolle, dass ich sie hier erwähnen möchte. Sei dazu $(H, \leq)$ eine Halbordnung, $T \subseteq H$ und $h \in H$. Gilt $t \leq h$ für alle $t \in T$, so heißt h *obere Schranke von* T, gilt $h \leq t$ für alle $t \in T$, so heißt h *untere Schranke* von T. T heißt nach oben bzw. unten beschränkt, sofern es wenigstens eine obere bzw. untere Schranke von T gibt. Gibt es unter den oberen/unteren Schranken von T ein h, das selbst in T liegt, heißt h auch *größtes Element* oder *Maximum* bzw. *kleinstes Element* oder *Minimum* von T, symbolisch $h = \max T$ bzw. $h = \min T$. Liegt h nicht unbedingt in T, ist h aber Minimum der Menge der oberen Schranken von T, nennt man h das *Supremum* von T, symbolisch $h = \sup T$. Analog nennt man das Maximum der Menge der unteren Schranken (sofern vorhanden) das *Infimum* von T, symbolisch $h = \inf T$. Zu unterscheiden sind auch noch *maximale* bzw. *minimale* Elemente von T. Das sind solche, die nicht unbedingt Maximum bzw. Minimum von

T sind, zu denen es aber keine echt größeren bzw. kleineren Elemente von T gibt. Will man sich die logischen Zusammenhänge und die Unterschiede zwischen diesen Begriffsbildungen klarmachen, mag die Illustration eines Beispiels durch ein sogenanntes *Hassediagramm* hilfreich sein:

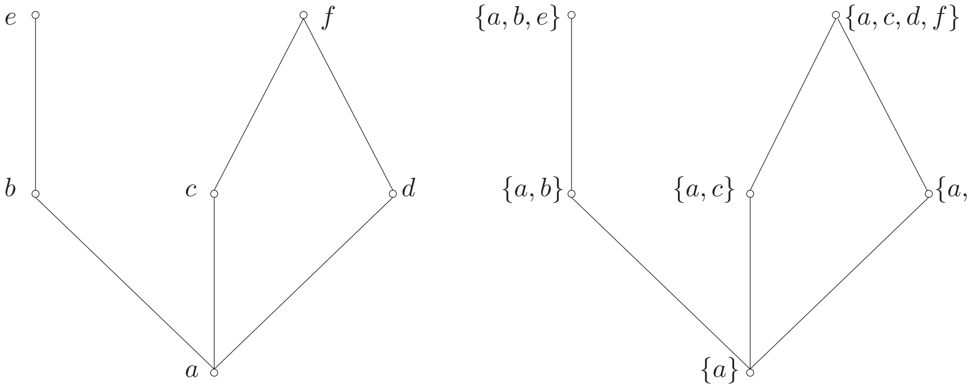


Durch dieses Diagramm wird eine Halbordnung $(H, \leq)$ auf der Menge $H = \{a, b, c, d, e, f\}$ dargestellt. Es gelten die strikten Ungleichungsrelationen $a < b$, $a < c$, $a < d$, $b < e$, $c < f$, $d < f$ sowie die mittels Transitivität daraus folgenden $a < e$ und $a < f$. Diese Halbordung besitzt das Minimum (kleinste Element) a, aber kein Maximum. Dennoch sind e und f maximale Elemente. Die Teilmenge $T = \{b, c\}$ besitzt eine untere Schranke a, aber keine obere Schranke. a ist außerdem Infimum von T aber nicht Minimum.

5.6 Strukturvergleich — Abbildungen

Die Mathematik sei eine quantitative Disziplin, lautet ein häufig zu hörendes Missverständnis. Ziemlich genau das Gegenteil ist der Fall, auch wenn sich die Mathematik viel mit Quantitäten (Zahlen) auseinandersetzt. Die Mathematik interessiert sich nämlich vor allem für die wesentlichen Eigenschaften ihrer Objekte, d.h. für Qualitäten. Welche Eigenschaften wesentlich sind, hängt freilich stark vom Kontext ab. Er bestimmt, nach welchen Gesichtspunkten wir nicht identische Objekte doch als ähnlich (äquivalent) oder als wesentlich verschieden ansehen.

Weil diese Andeutungen hier etwas abstrakt und wenig greifbar anmuten mögen, will ich das Beispiel der Halbordnung aus dem vorangegangenen Abschnitt nochmals aufgreifen. Dort habe ich behauptet, dass in einem gewissen Sinn jede Halbordnung wie eine Mengenhalbordnung aussieht. Was damit gemeint ist, sollte aus folgender vergleichender Graphik klar hervorgehen:



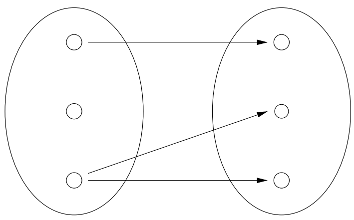
Offensichtlich gibt es eine Korrespondenz zwischen dem linken und dem rechten Hassediagramm: Der Punkt a auf der linken Seite gehört zum Punkt $\{a\}$ auf der rechten, b zu $\{a, b\}$, c zu $\{a, c\}$, d zu $\{a, d\}$, e zu $\{a, b, e\}$ und f zu $\{a, c, d, f\}$. Es leuchtet ein, dass eine ähnliche Konstruktion mit jeder beliebigen Halbordnung $(H, \leq)$ möglich ist. Zu einem Element $h \in H$ gehört die Menge M_h aller $h' \in H$ mit $h' \leq h$. Mit $X = \{M_h : \; h \in H\}$ erhält man eine Mengenhalbordnung $(X, \subseteq)$, die der Halbordnung $(H, \leq)$ im selben Sinne gleicht, wie oben im Beispiel.

Eine Formalisierung dieser Beobachtung gelingt mit dem überaus fundamentalen Begriff der *Abbildung* oder *Funktion*. Sind A und B irgendwelche Mengen (im Beispiel H und X), so soll eine Abbildung f die Elemente von A in eine Beziehung setzen zu Elementen aus B. Wieder leisten geordnete Paare wertvolle Dienste. Wir fassen nämlich f als Menge von Paaren $(a,b) \in A \times B$ auf, wobei wir verlangen, dass zu jedem $a \in A$ genau ein $b \in B$ gehört [5]. Also ist $f \subseteq A \times B$ eine Relation zwischen A und B mit der zusätzlichen Eigenschaft, dass $\forall a \in A\ \exists! b \in B :\ (a,b) \in f$. Man schreibt $f : A \to B$ und nennt f eine Abbildung oder Funktion von A nach B. A heißt *Definitionsbereich* oder *Definitionsmenge* von f, B *Zielbereich* oder *Zielmenge*. Für $(a,b) \in f$ schreibt man auch $f : a \mapsto b$ oder $b = f(a)$ und nennt b den *Funktionswert* von a unter f. Man beachte, dass nicht jedes $b \in B$ als Funktionswert unter f auftreten muss. Die Menge $W \subseteq B$ aller $b \in B$, die das sehr wohl tun, heißt *Wertebereich* von f und wird auch mit $f(A)$ bezeichnet. Im Fall $W = f(A) = B$ heißt f *surjektiv auf* B. Es ist erlaubt, dass ein $b \in B$ Funktionswert von verschiedenen Elementen von A ist. Ist dies jedoch nicht der Fall, so heißt f *injektiv*. $f : A \to B$ heißt *bijektiv* oder *eineindeutig*, falls es sowohl surjektiv als auch injektiv ist [6].

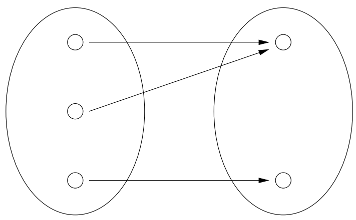
Bijektive Abbildungen existieren nur zwischen Mengen mit gleich vielen Elementen. Diese Beobachtung ist bei endlichen Mengen fundamental für eine mengentheoretische Begründung des Zahlbegriffs mittels Anzahlen (vgl. [8]). Wendet man diesen Gesichtspunkt auch auf unendliche Mengen an, so steht man genau an dem Punkt, wo Cantor die Mengenlehre als selbständiges mathematisches Teilgebiet begründete.

Genau die bijektiven Abbildungen $f : A \to B$ haben die Eigenschaft, dass eine Vertauschung der Komponenten wieder zu einer Funktion führt, zur sogenannten *Umkehrfunktion* oder *inversen Abbildung* $f^{-1} : B \to A$. Formal ist also $f^{-1} = \{(b,a) :\ (a,b) \in f\}$. Im nachfolgenden Diagramm entspräche das der Umkehrung der Pfeilrichtung.

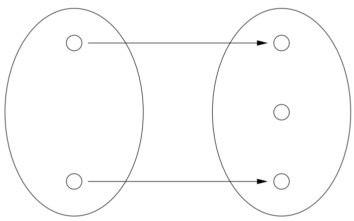
keine Abbildung



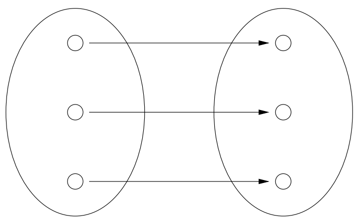
surjektiv, nicht injektiv



injektiv, nicht surjektiv



bijektiv



Man beachte, dass auch (reelle) Funktionen unter diesen Begriff fallen. Zum Beispiel wird $f : x \mapsto x^2$ als Menge $f = \{(x,y) :\ x \in \mathbb{R}, y = x^2\}$ aufgefasst.

[5] Es treten auch Varianten dieser Formalisierung auf, zum Beispiel in der Geometrie, wenn man partielle Abbildungen zulassen möchte.

[6] Die Zuordnung im obigen Beispiel mit den beiden Halbordnungen ist bijektiv. Darüber hinaus ist sie sogar ein Isomorphismus, d.h. eine strukturverträgliche Abbildung. Das äußert sich darin, dass die Punkte im linken und rechten Diagramm einander nicht nur irgendwie eineindeutig zugeordnet werden, sondern derart, dass alles auch mit den Verbindungslinien im Hassediagramm zusammenpasst.

5.7 Die Verknüpfung von Abbildungen — Halbgruppen und Gruppen

Sind $R \subseteq A \times B$ und $S \subseteq B \times C$ Relationen zwischen A und B bzw. zwischen B und C, so kann man ihre sogenannte *Verknüpfung, Komposition* oder auch *Hintereinanderausführung* betrachten. Dabei handelt es sich um eine Relation zwischen A und C, bestehend genau aus jenen Paaren (a, c), zu denen es ein Zwischenglied $b \in B$ gibt mit $(a, b) \in R$ und $(b, c) \in S$.

Besonders bedeutsam ist dieses Konzept im Falle von Abbildungen $f : A \to B$ und $g : B \to C$. Die Verknüpfung ist dann wieder eine Abbildung, die surjektiv/injektiv/bijektiv ist, sofern es f und g beide sind. Ich bezeichne, dem häufigeren Gebrauch entsprechend, die Verknüpfung mit $g \circ f : A \to C$, $g \circ f(a) = g(f(a))$. (Es tritt auch die Notation in umgekehrter Reihenfolge auf, der Vorstellung entsprechend, dass zuerst f und dann g angewendet wird.) Es gilt das sogenannte *Assoziativgesetz* $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$, übrigens natürlich auch allgemeiner für Relationen.

Besondere Erwähnung verdient der Fall $A = B$, in welchem Abbildungen $f : A \to A$ häufig auch *Transformationen* der Menge A genannt werden. Bezeichne H_A die Menge aller $f : A \to A$. Dann liegt in $\circ$ eine sogenannte *binäre Operation* auf der *Trägermenge* H_A vor. Das ist eine Abbildung, in diesem Fall $\circ : H_A \times H_A \to H_A, (f, g) \mapsto f \circ g$, die je zwei Elementen der Trägermenge wieder ein Element aus der Trägermenge zuordnet. Gilt, wie in unserem Fall, das Assoziativgesetz, spricht man von einer *Halbgruppe*. Analog wie Halbordnungen werden auch Halbgruppen als geordnete Paare aufgefasst mit Trägermenge und Operation als Komponenten. In unserem Beispiel: $(H_A, \circ)$. Eine besondere Rolle spielt die sogenannte *identische Abbildung* oder *Identität* auf der Menge A, symbolisch $\mathrm{Id} = \mathrm{Id}_A : a \mapsto a$, die jedes $a \in A$ sich selbst als Funktonswert zuweist. Sie hat die Eigenschaft $f \circ \mathrm{Id} = \mathrm{Id} \circ f = f$ für alle $f \in H_A$. Ganz allgemein in einer Halbgruppe heißt ein solches Element, das bei Ausführung der Operation keine Änderung bewirkt, *neutral* bezüglich der binären Operation oder auch *Einselement*. Gibt es in einer Halbgruppe ein Einselement, so ist es eindeutig bestimmt. Eine Halbgruppe mit Einselement heißt auch *Monoid*.

Schränken wir unsere Betrachtungen auf jene $f : A \to A$ ein, die bijektiv sind, so erhalten wir die *symmetrische Gruppe* S_A auf der Menge A. Allgemein ist eine *Gruppe* definiert als Monoid $(G, \circ)$ mit Einselement e, wo jedes $g \in G$ ein sogenanntes *Inverses* g^{-1} besitzt, welches durch die Beziehung $g \circ g^{-1} = g^{-1} \circ g = e$ gekennzeichnet ist. In S_A sind die Umkehrfunktionen (inversen Abbildungen) offenbar auch in diesem gruppentheoretischen Sinn invers.

Eine Bemerkung zum Wort *symmetrisch*: Symmetrien im landläufigen geometrischen Sinn, z.B. Drehungen oder Spiegelungen lassen sich als bijektive Transformationen deuten, die Gruppen bilden. Im Falle eines Quadrats zum Beispiel gibt es neben der Identität drei Drehungen und vier Spiegelungen, die das Quadrat in sich selbst überführen. Die Symmetriegruppe des Quadrats besteht also aus acht Elementen, die sich alle auch als bijektive Transformationen auf der vierelementigen Menge E der Eckpunkte deuten lassen. Allerdings treten darin offenbar nicht alle der insgesamt 24 Elemente der symmetrischen Gruppe $S_E = S_4$ auf. Symmetriegruppen spielen sowohl in teils sehr abstrakten mathematischen als auch in vielen naturwissenschaftlichen Zusammenhängen eine wichtige Rolle und bestimmen so das wissenschaftliche Denken in vielen Bereichen.

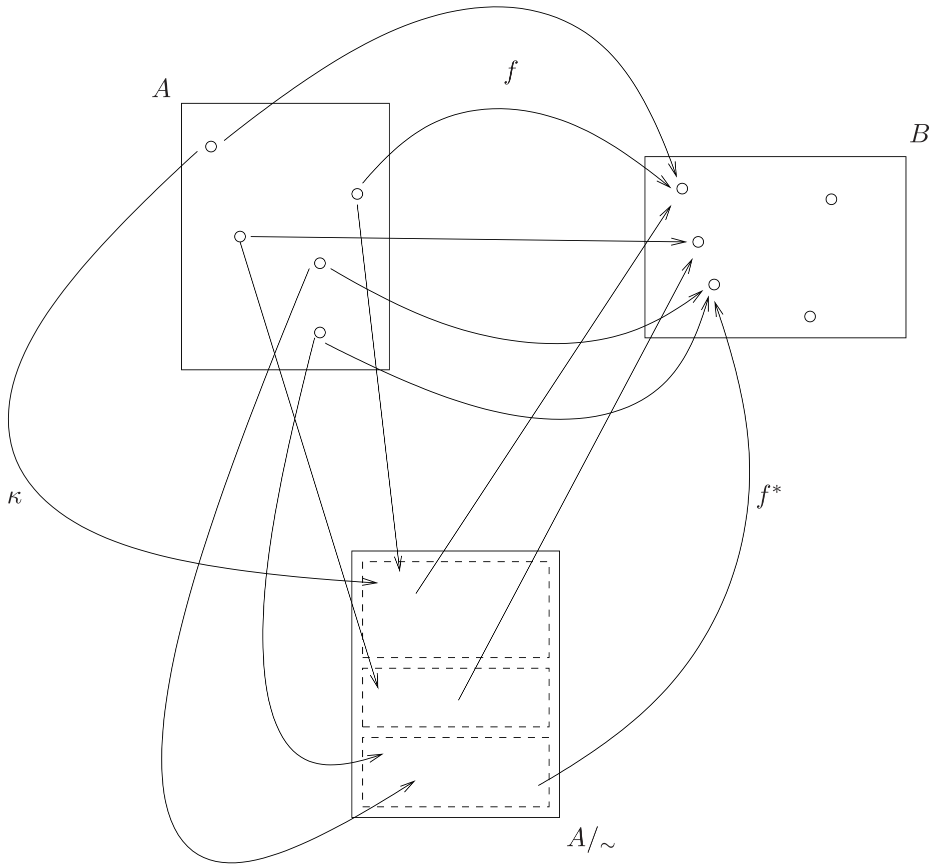
5.8 Weiterführungen

Schnitt wie auch Vereinigung zweier Mengen lassen sich — wie wir schon gesehen haben — sehr leicht auf beliebig, insbesondere auch auf unendlich viele Mengen verallgemeinern. Beim kartesischen Produkt ist dies etwas komplizierter. Wohl lässt sich für drei Mengen ein Produkt $A \times B \times C$ durch $(A \times B) \times C$ festsetzen, ähnlich für vier, fünf etc., nicht aber für unendlich viele [7]. Der Ausweg besteht darin, dass man ein Paar, Tripel, Quadrupel etc. auffasst als ein Objekt mit mehreren oder auch unendlich vielen Komponenten $i \in I$ (Indexmenge), von denen jeder eine Eintragung aus einer für diese Komponente vorgesehenen Menge A_i zugewiesen ist. Formal ist so ein Objekt also eine Abbildung $f : I \to \bigcup_{i \in I} A_i$ mit der Eigenschaft, dass $f(i) \in A_i$ für alle $i \in I$. Oft schreibt man für f auch $(a_i)_{i \in I}$, wobei $a_i = f(i) \in A_i$. Die Menge aller solchen f ist dann das *(große)*

[7] Außerdem liefert eine streng formale Betrachtungsweise wegen $((a, b), c) \neq (a, (b, c))$ auch $(A \times B) \times C \neq A \times (B \times C)$, was vermutlich als unerwünscht empfunden wird.

kartesische Produkt der A_i, $i \in I$, symbolisch $\prod_{i \in I} A_i$. Sind alle $A_i = A$ gleich, schreibt man dafür auch A^I.

Folgende Überlegung setzt viele der behandelten Grundbegriffe in eine wichtige Beziehung zueinander: Ist $f : A \to B$ eine beliebige Abbildung, so wird auf A durch $a_1 \sim a_2$, sofern $f(a_1) = f(a_2)$, eine Äquivalenzrelation definiert. Bezeichne $A/_\sim$ die zugehörige Partition auf A, $\kappa : A \to A/_\sim$, die sogenannte *kanonische Abbildung* [8], welche jedem $a \in A$ seine Äquivalenzklasse $[a]_\sim = \kappa(a) = \{a' \in A : \ a \sim a'\} \in A/_\sim$ zuordnet. Dann gibt es eine eindeutig bestimmte Abbildung $f^* : A/_\sim \to B$ mit der Eigenschaft $f = f^* \circ \kappa$. Dabei ist stets f^* injektiv und κ surjektiv; ist auch f surjektiv, so ist f^* sogar bijektiv. Die folgende Darstellung in Diagrammform sollte selbsterklärend sein.



In all dem kommen keine tiefen mathematischen Weisheiten zum Ausdruck. Gewissermaßen handelt es sich sogar durchwegs um Trivialitäten. In ihrem Zusammenwirken jedoch schaffen diese Trivialitäten einen Überblick, ohne den man zu vielen fortgeschritteneren Einsichten nie vordringen könnte.

Zu den markantesten Schritten im mengentheoretischen Aufbau der Mathematik gehören die Konstruktion der natürlichen Zahlen als Mengen ($0 = \emptyset$, $1 = \{0\}$, $2 = \{0, 1\}$ etc.) und darauf aufbauend die Zahlbereichserweiterungen: Ganze Zahlen $k \in \mathbb{Z}$ kommen als Differenzen $k = a - b$ natürlicher Zahlen $a, b \in \mathbb{N}$ zustande. Entsprechend werden sie formal als Äquivalenzklassen von Paaren $(a, b) \in \mathbb{N}^2$ gefasst (nämlich all jener Paare, die derselben Differenz entsprechen), ähnlich rationale Zahlen $q = \frac{a}{b}$ als Klassen von Paaren $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$, $b \neq 0$. Reelle Zahlen $x \in \mathbb{R}$ deutet man vorzugsweise als Dedekindsche Schnitte, das sind Mengen (oder Paare von Mengen) rationaler Zahlen q (nämlich z.B. aller $q < x$). Komplexe Zahlen $a + bi \in \mathbb{C}$ schließlich sind Paare reeller Zahlen a, b. Diese Schlagworte erwähne ich nur als Gedächtnisstütze. Für Ausführlicheres verweise ich auf andere Quellen wie [5], [1], [3] und [10].

[8] lässt sich zu jeder Äquivalenzrelation bzw. Partition definieren

Stehen einmal die Zahlensysteme $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$ zur Verfügung, so lassen sich daraus in konventioneller Weise alle möglichen interessanten Objekte der Mathematik aufbauen: die euklidischen Räume $\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \ldots \times \mathbb{R}$ mit den vielfältigsten geometrischen Gebilden als Teilmengen, Funktionenräume, algebraische und topologische Strukturen etc.

Literatur

[1] Oliver Deiser, *Reelle Zahlen. Das klassische Kontinuum und die Folgen*, Springer, Berlin–Heidelberg (2007).

[2] Gerhard Dorfer, *Von den natürlichen Zahlen zu den Quaternionen*, Didaktikhefte der ÖMG 30, 30-45 (1999).

[3] Ebbinghaus et al., *Zahlen*, Springer Berlin–Heidelberg (1983).

[4] András Hajnal and Peter Hamburger, *Set Theory*, London Mathematical Society, Student Texts 48, Cambridge University Press (1999).

[5] Gerald Kuba und Stefan Götz, *Zahlen*, Fischer Taschenbuch Verlag, Frankfurt (2004).

[6] Joseph R. Shoenfield. Mathematical Logic. Nachdruck des Zweitdrucks von 1973, Association for Symbolic Logic, Urbana (2001).

[7] Reinhard Winkler, *Sinn und Unsinn des Rechnens im Mathematikunterricht*, Didaktikhefte der ÖMG 39, 155-165 (2007).

[8] Reinhard Winkler, *Wir zählen bis drei — und sogar darüber hinaus*, Didaktikhefte der ÖMG 40, 129-141 (2008).

[9] Reinhard Winkler, *Was ist Mathematik? — ein subjektiver Zugang*. Englische Übersetzung in: The Language of Science – ISSN 1971-1352 – Monza: Polimetrica (2007). Die Deutsche Originalfassung (wie auch meine anderen erwähnten Artikel) ist auf meiner homepage verfügbar: http://dmg.tuwien.ac.at/winkler/pub/.

[10] Reinhard Winkler, *Die reellen Zahlen sind anders*, Didaktikhefte der ÖMG 41, 140-153 (2009).