Sinn und Unsinn des Rechnens im Mathematikunterricht

Reinhard Winkler (TU Wien)

Zusammenfassung

Es besteht kaum ein Zweifel darin, dass im Mathematikunterricht tendenziell zu viel gerechnet wird und dabei die vielfältigen anderen Aspekte der Mathematik zu kurz kommen. Andererseits ist Mathematik ganz ohne Rechnen natürlich auch nicht sinnvoll. In diesem Artikel versuche ich sowohl anhand von Beispielen als auch in Form allgemeiner Überlegungen, einige Kriterien anzubieten, mit Hilfe derer in konkreten Situationen beurteilt werden kann, ob gewisse Rechentechniken für den Unterricht als sinnvoll einzustufen sind bzw. welche Möglichkeiten bestehen, um sie in einen sinnstiftenden Kontext zu stellen.

1 Einleitung – ein typisches Beispiel

Legt man einem Schüler, in dessen Mathematikunterricht gerade algebraische Termumformungen mit mehreren Variablen durchgenommen worden sind, ein Blatt Papier mit der Zeile

$$\frac{a^3 - b^3}{a^3 - ab^2} =$$

vor, drückt man ihm ein Schreibgerät in die Hand und teilt man ihm mit, dass jetzt Mathematik angesagt sei, so hat man eine gute Chance, dass der Schüler diese Schriftzeichen reflexartig fortsetzt zur Zeile

$$\frac{a^3 - b^3}{a^3 - ab^2} = \frac{(a-b)(a^2+ab+b^2)}{a(a+b)(a-b)} = \frac{a^2+ab+b^2}{a(a+b)}.$$

Vielleicht wird er dann kurz innehalten und schließlich den letzten Ausdruck doppelt unterstreichen. Für diese Vorgangsweise des Schülers lassen sich auch gute Gründe finden. Fragt man bei ihm nach, könnte sich folgender Dialog ergeben:

Frage: Was hast Du da gemacht?
Schüler: Na das! (Zeigt auf das Geschriebene und liest Teile davon vor. Vielleicht murmelt er etwas von *Formel* und *in der Schule gemacht*.)
Frage: Warum hast Du das gemacht?
Schüler: In Mathematik machen wir das immer so.
Frage: Wie lautet die Aufgabenstellung?
Schüler: Na wir sollen zum Beispiel ... (Wiederholt seine Ausführungen zur ersten Frage.)
Frage: Welche Art von Aufgaben ist auf diese Weise zu behandeln?
Schüler: Na, wenn man zum Beispiel rechnen muss ... (Bringt eine leicht veränderte Variante des schon zweimal Gesagten.)
Frage: Und wozu macht Ihr das?
Schüler: (Zuckt die Achseln, sodann verschmitzt) Ich mach' es, damit ich in Mathematik durchkomme.
Frage: Und warum hast Du unterstrichen?
Schüler: Wenn man das Ergebnis nicht unterstreicht, gibt es Punkteabzug.

Man kann schwerlich behaupten, dass dieser Schüler Sinn in seinem Tun erkenne. Und Tun ohne Einsicht in den Sinn dahinter ist wohl ziemlich genau das, was man Unsinn nennt.

Die Schuld dafür trägt aber vermutlich nur in seltenen Fällen der Schüler, sondern ein Mathematikunterricht, der die falschen Schwerpunkte setzt. Leider ist obiger Dialog im Wesentlichen der Realität entnommen, und meine Phantasie kann keinerlei Urheberrechte dafür in Anspruch nehmen. Ich habe eine tatsächliche Begebenheit bestenfalls geringfügig komprimiert, beziehungsweise zahlreiche ähnliche Erfahrungen zu einer zusammengefasst. Ich behaupte daher, dass im Mathematikunterricht aller Ebenen unseres Schulsystems viel zu viel unsinniges Rechnen betrieben wird. Als Hauptübel vermute ich, dass der Formalismus zum Selbstzweck erhoben wird und vergessen wird, dass die Symbole auch eine Bedeutung haben.

Will man solche Missstände vermeiden, bieten sich zwei Alternativen an: Entweder man streicht unsinniges Rechnen einfach, oder man gibt dem Rechnen Bedeutung und Sinn. Die Entscheidung wird von Fall zu Fall unterschiedlich ausfallen. Sie wird davon abhängen, welchen Aufwand es erfordert, den Sinn sichtbar zu machen, welcher hinter den Rechnungen steht.

Im mathematischen Hauptteil dieses Artikels (Kapitel 2) werde ich zunächst mehrere Beispiele auf unterschiedlichem Niveau besprechen, an denen die Grenze zwischen Sinn und Unsinn des Rechnens auf konkrete Weise deutlich gemacht werden kann. In diesem Kapitel kommen z.B. aber auch auf wenigen Seiten alle entscheidenden Ideen vor für den Beweis, dass der Polynomring $\mathbb{Z}[x_1, \ldots, x_n]$ über $\mathbb{Z}$ in mehreren Variablen faktoriell ist. Auf dieses Faktum spitzt sich nämlich die Frage nach dem Sinn hinter dem Beispiel vom Anfang zu. Dem Schüler aus dem Eingangsdialog werden damit auch befriedigendere Antworten für die peinliche Befragung angeboten. Im allgemeinen Schlussteil (Kapitel 3) versuche ich zu abstrahieren, generelle Gesichtspunkte herauszuarbeiten und Schlussfolgerungen zu ziehen.

Ich fordere also keineswegs, das Rechnen aus dem Unterricht zu streichen, sondern: *Wann immer gerechnet wird, soll es dem Schüler möglich sein, auch einen Sinn darin zu sehen.* Und an Beispielen will ich erläutern, wo dieser Sinn liegen könnte. Dabei greife ich nicht einmal zu Anwendungen, die sich natürlich immer zur Sinngebung im Mathematikunterricht anbieten. Hier versuche ich vor allem zu zeigen, dass die Mathematik selbst so voll ist von reizvollen Aspekten, dass Mathematiklehrer nie verlegen sein sollten, wenn Schüler die höchst berechtigte Frage nach dem *Warum?* stellen; egal, ob damit eine Motivation, ein mathematischer Beweis oder ein Zweck gemeint ist.

2 Beispiele vom Kindergarten zur Universität

2.1 Äpfel und Birnen – der Zahlbegriff

Ich beginne mit einer nur scheinbar banalen Frage, die Didaktik für Kleinkinder mit philosophischen Grundlagen der Mathematik verbindet.

$$\text{Was bedeutet } 3 + 2 = 5 \text{ ?}$$

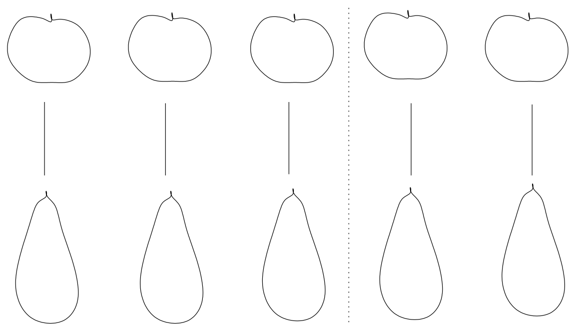
Die spontane Antwort lautet wohl: *Drei plus zwei ist dasselbe wie fünf.* Richten wir unser Augenmerk auf die niedergeschriebenen Schriftzeichen, so könnte man einwenden: Aber links vom Symbol $=$ steht doch etwas anderes als rechts; links stehen mehrere Zeichen, rechts nur eines. Die unvermeidliche Konsequenz: Die Zeichen beziehen sich, so wie das bei Sprache und Schrift generell üblich ist, auf Objekte außerhalb der Welt der Symbole und stehen nicht für sich selbst. Und die Zeichenkette links $(3 + 2)$ bezeichnet dasselbe Objekt wie das Zeichen rechts (5). Mathematik ist also mehr als Symbolmanipulation, sondern macht Aussagen über eine zumindest ideelle Wirklichkeit.

Unabhängig davon, ob man philosophisch nun einen platonistischen, einen konstruktivistischen, einen formalistischen oder sonst einen Standpunkt einnimmt, wird man wohl zustimmen, dass zur Tatsache, dass drei plus zwei fünf ist, ein Bild (siehe weiter unten) Wesentlicheres auszudrücken imstande ist, als Ziffern allein. Das Interesse der Mathematik gilt in erster Linie den Zahlen und nicht den Ziffern. Als graphische Zeichen mögen Ziffern Gegenstand gewisser kulturhistorischer

Untersuchungen sein; für den Mathematiker sind sie beliebig und austauschbar, daher kümmert er sich um sie nicht. Dem Bild der Äpfel und Birnen hingegen kann tatsächlich schon ein Vorschulkind Sinn abgewinnen, und es bringt darüber hinaus einige fundamentale Aspekte des Zahlbegriffs zum Ausdruck, welche sich – zunächst auf einem Niveau, das zugegebenermaßen reiferen Menschen vorbehalten sein mag – auch mathematisch auf den Punkt bringen lassen:

Zahlen haben die Bedeutung von Anzahlen der Elemente von Mengen, sogenannte Kardinalitäten. Zwei Mengen A und B haben genau dann die gleiche Kardinalität, in Zeichen $A \sim B$, wenn es eine Bijektion zwischen ihnen gibt. Und die Bedeutung des Zahlbegriffs wird vor allem dadurch deutlich, dass es bei vielen Operationen mit Mengen (Vereinigungen, Produktmengen etc.) nur auf die Kardinalitäten ankommt. Präziser: $A_1 \sim A_2$, $B_1 \sim B_2$ impliziert $A_1 \cup B_1 \sim A_2 \cup B_2$, sofern zusätzlich $A_1 \cap B_1 = \emptyset = A_2 \cap B_2$ vorausgesetzt wird.

Der Sinn dieser formalisierten mathematischen Aussagen erschließt sich in modifizierter Formulierung, die vielleicht mit einer Veranschaulichung verbunden ist, auch Kleinkindern:



Andrea und Barbara haben beide ihre eigenen Äpfel, Alexander und Bernhard Birnen. Angenommen, die Äpfel von Andrea sind genauso viele wie die Birnen von Alexander, und die Äpfel von Barbara sind genau so viele wie die Birnen von Bernhard. Wenn die Mädchen ihre Äpfel zusammengeben und die Buben die Birnen, dann haben die Mädchen gleich viele Äpfel wie die Buben Birnen.

Banal, aber fundamental für unseren Zahlbegriff; und für ein Kleinkind möglicherweise ein wertvolles Aha-Erlebnis auf dem Weg zum Verständnis der Zahlen.

2.2 Grundrechnungsarten

Lehrziel in den ersten Schuljahren ist u.a., von Äpfeln und Birnen zu abstrahieren und mit der Darstellung der Zahlen im dekadischen System (Positionssystem) vertraut zu werden, zumindest im Zahlenraum bis hundert oder tausend. Eine typische einfache Aufgabe wäre:

$$\text{Berechne } 17 + 14$$

Der beflissene Schüler wird die Standardmethode der Addition mit Übertrag anwenden, was etwa der Umformung $17 + 14 = 1 \cdot 10 + 7 + 1 \cdot 10 + 4 = 2 \cdot 10 + 11 = 3 \cdot 10 + 1 = 31$ entspricht. Aber warum erwarten wir dieses Ergebnis, und nicht etwa $17 + 14 = 18 + 13$, was auch zweifellos wahr ist?

Die Darstellung im dekadischen System (natürlich wären andere Basen als Zehn mathematisch genauso befriedigend, besonders die Basis Zwei für das Binärsystem) spielt offenbar eine fundamentale Rolle: Erstens hat jede (zunächst einmal natürliche) Zahl eine eindeutige Darstellung als Folge der Ziffern 0 bis 9. (Wir vereinbaren, dass außer für die Zahl Null selbst nicht mit der Ziffer 0 begonnen werden darf, um etwa die Darstellung 012 statt 12 auszuschließen.) Und zweitens – was wohl noch viel wichtiger ist – ermöglicht diese Darstellung sehr effektive Methoden zur Berechnung von Summe, Produkt etc. Man vergleiche die übliche Additionsmethode im Positionssystem oben mit der mühseligen Alternative $17 + 14 = 18 + 13 = 19 + 12 = 20 + 11 = \ldots = 30 + 1 = 31$, womöglich mit einer Stricherlnotation wie ||||||||||||||||| für 17. Letzteres wäre die Methode, welche dem Rechnen mit den Fingern entspricht, welche Kinder meist anwenden, wenn sie noch nicht lesen und schreiben können. Für das viel leistungsfähigere Positionssystem braucht man lediglich ein paar Ziffern (mindestens zwei wie im Binärsystem, zehn im dekadischen), eine Liste für alle Summen von Ziffern und eine Regel für den Umgang mit Überträgen.

Analoges gilt für die Multiplikation, wobei die Liste für die Produkte der Ziffern gerade das ist, was man als *Kleines Ein-mal-Eins* bezeichnet. Dieses stellt also den Kern für das übliche Verfahren zur Multiplikation beliebiger Zahlen in dekadischer Darstellung dar.

Folgende Erkenntnisse sind allen Kindern, welche die Ausführung der Grundrechnungsarten erlernen sollen, zuzumuten oder – genauer – nicht vorzuenthalten: Jeder Zahl ist in eindeutiger Weise eine symbolische Darstellung zugeordnet, welche aber von der Zahl selbst zu unterscheiden ist. (So eine eindeutige Darstellung werde ich hier wie auch in anderen Zusammenhängen eine *Normalform* nennen.) Die Grundrechnungsarten sind für die Zahlen definiert, nicht für die Darstellungen, und haben eine inhaltliche Bedeutung. Die üblichen Rechenmethoden erlauben es, auf sehr effektive Weise die dekadische *Darstellung* der Summe $a+b$ zweier Zahlen zu ermitteln, wenn die *Darstellungen* für a und b vorgegeben sind. Die Methoden (Algorithmen) lassen sich in völlig strikte Regeln für die Manipulation mit Zeichen fassen, so dass sie auch von Maschinen ausgeführt werden können. Für den Computer ist das Binärsystem, welches nur zwei Ziffern verwendet, noch praktischer. Dort lautet das kleine Ein-mal-Eins (seinem Namen noch besser gerecht werdend) $0 \cdot 0 = 0 \cdot 1 = 1 \cdot 0 = 0$ und $1 \cdot 1 = 1$. Zusammen mit den Eins-plus-eins-Regeln $0 + 0 = 0$, $0 + 1 = 1 + 0 = 1$ und $1 + 1 = 10$ bildet es das Material für die automatisierte Ausführung der Grundrechnungsarten.

2.3 Brüche, der Euklidische Algorithmus und Primzahlen

Nach der Addition und einigen Andeutungen zur Multiplikation wende ich mich nun einer genaueren Analyse der Division zu und damit den rationalen Zahlen, d.h. den Brüchen. Wieder beginne ich mit einer exemplarischen Frage:

$$\text{Was bedeutet } \frac{168756}{33684} = \frac{26117}{5213}\,?$$

Ein Entscheidungsverfahren, ob die Gleichung stimmt, liegt auf der Hand: Wir haben unseren Multiplikationsalgorithmus anzuwenden, um festzustellen, ob $168756 \cdot 5213 = 26117 \cdot 33684$. Tut man dies, erweist sich diese spezielle Gleichung tatsächlich als wahr. Allerdings ist damit nicht beantwortet, welches Objekt x durch die Brüche überhaupt dargestellt wird. Diese Frage ist schwieriger, als es auf den ersten Moment den Anschein hat! Eine für Schüler angemessene Antwort mag sein: Ein Bruch $\frac{z}{n}$ mit Zähler z und Nenner n bezeichnet jene (i.a. nicht ganzzahlige) Quantität x, welche mit n multipliziert gerade z ergibt. (Wenn kritische Schüler nachfragen, was hier unter *Quantität* zu verstehen sei, möge sich der Lehrer glücklich preisen, so lebendige Geister unterrichten zu dürfen!)

Ich kehre zu unserem Zahlenbeispiel zurück und weise darauf hin, dass es im Lichte des vorangegangenen Abschnitts nicht sehr befriedigend erscheint, wenn eine Größe x verschiedene, auf den ersten Blick gleichwertige Darstellungen hat. Der zweite Bruch mag etwas sympathischer sein, weil Zähler und Nenner kleiner sind als im ersten. Aber können wir die Sache nicht noch verbessern, indem wir eine kleinste, d.h. gekürzte Darstellung finden? Nebenbei gibt die Bruchdarstellung keine gute Vorstellung von der Größe von x. Also führen wir eine Division mit Rest durch. Diese liefert für den zweiten Bruch: $26117 = 5 \cdot 5213 + 52$, woraus z.B. $5 < x < 6$ ersichtlich ist, aber auch dass der Nenner kein Teiler des Zählers ist. Man kann aber noch mehr erkennen: Jeder gemeinsame Teiler des Zählers 26117 und des Nenners 5213 muss auch ein gemeinsamer Teiler von 5213 und 52 sein und umgekehrt. Schreiben wir $\mathrm{gT}(a, b)$ für die Menge der gemeinsamen Teiler von a und b, so haben wir also $\mathrm{gT}(26117, 5213) = \mathrm{gT}(5213, 52)$. Diese Vorgangsweise lässt sich iterieren. Zusammengefasst ergibt sich

$$\begin{array}{rcrcrcrl}
26117 & = & 5 & \cdot & 5213 & + & 52, & \quad \text{also } \mathrm{gT}(26117{,}5213) = \mathrm{gT}(5213{,}52) \\
5213 & = & 100 & \cdot & 52 & + & 13, & \quad \text{also } \mathrm{gT}(5213{,}52) = \mathrm{gT}(52{,}13) \\
52 & = & 1 & \cdot & 13 & + & 0, & \quad \text{also } \mathrm{gT}(52{,}13) = \mathrm{gT}(13{,}0) = \{1, 13\}.
\end{array}$$

Insgesamt lesen wir daraus ab, dass genau die Teiler von 13 die gemeinsamen Teiler der ursprünglich vorgegebenen Zahlen sind. 13 ist also ihr ggT (größter gemeinsamer Teiler). Wir haben soeben nichts anderes gemacht, als den *Euklidischen Algorithmus* zur Berechnung des ggT=13 von 26117 und 5213 ausgeführt. Offenbar funktioniert diese Methode für beliebige ganzzahlige Startwerte.

Für unser Beispiel folgt, dass wir durch 13 kürzen können und somit wegen $\frac{26117}{13} = 2009$ und $\frac{5213}{13} = 401$ die gekürzte Darstellung $x = \frac{2009}{401}$ erhalten. Aber könnte es sein, dass es noch andere gekürzte Darstellungen $x = \frac{z}{n}$ mit $z, n \in \mathbb{N}$ gibt? Es würde folgen, dass $2009n = 401z$. Nun wissen wir, dass 2009 und 401 teilerfremd sind. Müssten demnach nicht alle Teiler von 2009 auch in z als Teiler enthalten sein, die von n in 401, und müsste somit nicht erst recht wieder $z = 2009$ und $n = 401$ folgen?

Ja! Der Grund liegt in der Eindeutigkeit der Primfaktorzerlegung, welche allerdings keineswegs selbstverständlich ist. Um das deutlich zu machen, stelle man sich eine Welt vor, in der nur gerade Zahlen existieren. Dann müssten z.B. die Zahlen 2,6,10 und 30 als Primzahlen gelten, weil sie sich nicht in ein Produkt von zwei geraden Zahlen aufspalten lassen. Die Zahl $60 = 30 \cdot 2 = 6 \cdot 10$ hätte also zwei verschiedene Primfaktorzerlegungen. Wir müssen uns daher überlegen, warum so etwas nicht auftreten kann, wenn man auch die ungeraden Zahlen zulässt. Warum also bilden die ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ einen sogenannten *faktoriellen Ring*?

Ich greife zurück auf obige Rechnungen im Euklidischen Algorithmus. Sie zeigen insbesondere, dass $13 = 5213 - 100 \cdot 52 = 5213 - 100 \cdot (26117 - 5 \cdot 5213) = x \cdot 26117 + y \cdot 5213$ mit $x = -100$ und $y = 501$. Offenbar hängt auch diese Überlegung nicht von den speziellen Zahlenwerten ab, und wir schließen: Der größte gemeinsame Teiler g zweier ganzer Zahlen a und b lässt sich als Linearkombination $g = xa + yb$ mit ganzzahligen Koeffizienten x, y schreiben (welche sich mit Hilfe des Euklidischen Algorithmus effektiv berechnen lassen).

Eine bedeutende Folgerung für Primzahlen lautet (Euklidisches Lemma): Teilt eine Primzahl p ein Produkt ab, so teilt p einen der beiden Faktoren. (Es sei daran erinnert: Primzahlen sind durch ihre *Irreduzibilität* definiert, genauer: Die Zahl $p \in \mathbb{N}$, $p > 1$, heißt Primzahl, falls 1 und p selbst ihre einzigen Teiler in $\mathbb{N}$ sind.) Ist nämlich p kein Teiler von a, so sind a und p teilerfremd, weil ja p eine Primzahl ist. Also gibt es eine Darstellung $1 = xa + yp$ mit ganzen Koeffizienten x und y. Multiplikation mit b liefert $b = xab + ypb$. Weil p beide Summanden auf der rechten Seite teilt, folgt also tatsächlich, dass p auch die linke Seite b teilt. Offenbar überträgt sich die Aussage genauso auf mehrere Faktoren: Teilt eine Primzahl ein Produkt, so teilt sie wenigstens einen Faktor. Liegen nun für eine Zahl n zwei Primfaktorzerlegungen $n = p_1 p_2 \dots p_k = p'_1 p'_2 \dots p'_{k'}$ vor, so muss p_1 nach dem Euklidischen Lemma auch einen Faktor auf der rechten Seite teilen, etwa p'_i. Weil p'_i selbst Primzahl ist, kommt nur $p_1 = p'_i$ in Frage, und wir können in beiden Darstellungen für n diesen gemeinsamen Faktor wegkürzen. Mit der neuen Zahl $n_1 = \frac{n}{p_1} < n$ können wir gleichermaßen fortfahren und wieder einen gemeinsamen Primfaktor wegkürzen etc. Fortsetzung dieses Verfahrens zeigt, dass in beiden Produkten genau dieselben Faktoren vorkommen und auch mit derselben Häufigkeit; lediglich die Reihenfolge der Faktoren kann variieren.

Ich fasse zusammen: Jeder Bruch, d.h. jede rationale Zahl hat eine gekürzte Darstellung, und diese ist sogar eindeutig. Nur deshalb ist das Kürzen von Brüchen ein zielgerichtetes Verfahren mit eindeutigem Ergebnis. Der Grund dafür liegt im fundamentalen Satz von der Eindeutigkeit der Primfaktorzerlegung. Diesen Satz kann man recht schnell mit Hilfe des Euklidischen Algorithmus einsehen, einem Verfahren, welches besonders für große Zähler und Nenner eine wesentlich effektivere Methode zur Berechnung des ggT liefert als eine mühsame Primfaktorzerlegung von Zähler und Nenner. (Man überzeuge sich von der unterschiedlichen Effektivität anhand des Bruchs $\frac{168756}{33684}$ vom Anfang dieses Abschnitts!)

2.4 Polynome und gebrochen rationale Ausdrücke

In Annäherung an das Rechenbeispiel aus der Einleitung betrachten wir nun die Umformung

$$\frac{x^2 + 2x + 1}{x^2 - 1} = \frac{(x+1)^2}{(x+1)(x-1)} = \frac{x+1}{x-1}.$$

Es stellen sich prinzipiell dieselben Fragen wie zuletzt:

1. Was für mathematische Objekte werden durch die Terme in x bezeichnet?
2. Was bedeutet die Gleichheit zwischen ihnen?
3. Inwiefern ist der letzte Ausdruck eine befriedigendere Darstellung, die sich mit gutem Recht als Ergebnis der Umformung ansehen lässt?

Zur ersten Frage bietet es sich zunächst an, die Ausdrücke als Funktionen in x aufzufassen, wobei für x z.B. reelle Werte zugelassen sind. Das führt aber zu einer Schwierigkeit betreffend den Definitionsbereich. Links müssen nämlich für x die Werte 1 und -1 ausgeschlossen werden, rechts nach dem Kürzen nur mehr $x = 1$. Genauer ist daher die Interpretation der Terme als Elemente des sogenannten Quotientenkörpers des Polynomrings. Ob wir als Koeffizienten Skalare aus dem Ring $\mathbb{Z}$ der ganzen Zahlen oder aus einem der Körper $\mathbb{Q}$ der rationalen, $\mathbb{R}$ der reellen oder $\mathbb{C}$ der komplexen Zahlen zulassen, will ich vorläufig offen lassen.

Mit der ersten ist auch die zweite Frage so gut wie beantwortet, und zwar in völliger Analogie zu den Brüchen ganzer Zahlen. Denn im Quotientenkörper gilt definitionsgemäß $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2}$ genau dann, wenn $a_1b_2 = a_2b_1$. Damit ist alles auf das Rechnen mit Polyomen zurückgeführt, welches ich hier als hinreichend bekannt voraussetzen darf.

Schlussendlich löst sich auch die dritte Frage wie beim Bruchrechnen auf. Division mit Rest funktioniert nämlich nicht nur für ganze Zahlen, sondern auch für Polynome. Allerdings müssen wir hierzu die Koeffizienten aus einem Körper zulassen. $\mathbb{Z}$ reicht als Koeffizientenbereich i.a. also nicht aus. Für den Euklidischen Algorithmus ist vor allem wichtig, dass sich in jedem Schritt der Grad der Polynome verringert, weshalb man nach einer von vornherein feststehenden Anzahl von Schritten sicher am Ende angelangt ist. Damit lassen sich alle Argumente des letzten Abschnitts auf die neue Situation übertragen, und man erhält die eindeutige Faktorisierung von Polynomen und somit die Existenz einer gekürzten Darstellung wie im Beispiel zu Beginn.

(Einschub, um allfälligen Verwirrungen vorzubeugen: So wie sich in den ganzen Zahlen n und $-n$ bezüglich Teilbarkeit nicht unterscheiden, sind skalare Vielfache αf von f, $\alpha \neq 0$ aus einem Körper K von Skalaren, hinsichtlich Teilbarkeit im Polynomring $K[x]$ äquivalent mit f. Man spricht von *assoziierten* Elementen, die sich nur um eine sogenannte multiplikative *Einheit*, das ist ein multiplikativ invertierbares Element, unterscheiden. Diese Feinheit ist im Themenkreis *Teilbarkeit* stets zu beachten. Ich will mich diesbezüglich aber lieber etwas ungenau als zu kompliziert und schwerfällig ausdrücken.)

Bei rigoroser Durchführung aller Schritte sind freilich einige Rechnungen nötig, um alle erwünschten Eigenschaften der involvierten algebraischen Strukturen zu bestätigen. Mir scheint dies für den Schulunterricht aber eher ermüdend. Die Analogie zum klassischen Bruchrechnen ist hinreichend überzeugend, und alle wesentlichen Ideen sind darin enthalten. Wer das erste verstanden hat, wird fürs zweite kaum mehr Details brauchen.

Im Euklidischen Algorithmus, auf dem vieles basiert, müssen die Koeffizienten aus einem Körper stammen. Was passiert aber, wenn wir nur ganze Koeffizienten zulassen?

2.5 Ganzzahlige Koeffizienten

Wir untersuchen die Zerlegung von Polynomen mit ganzzahligen Koeffizienten, arbeiten jetzt also im Bereich $\mathbb{Z}[x]$. Wichtig ist die Beobachtung, dass man aus einem Polynom $f(x)$ mit ganzzahligen Koeffizienten stets deren größten gemeinsamen Teiler $I(f)$, den sogenannten *Inhalt* von f, herausheben kann, so dass $f = I(f)f_0$. Hier hat auch das Polynom f_0 ganzzahlige Koeffizienten, die darüberhinaus ggT=1 besitzen. Solche Polynome nennt man auch *primitiv* (nicht zu verwechseln mit primitiven Polynomen in der Theorie endlicher Körper). Offenbar ist jedes über $\mathbb{Z}$ irreduzible Polynom primitiv.

Das Produkt zweier primitiver Polynome f und g erweist sich selbst als primitiv (Lemma 1). Zum Nachweis betrachte man eine beliebige Primzahl p und stelle $f = f_1 + pf_2$ und $g = g_1 + pg_2$ dar, wobei sämtliche Koeffizienten von f_1 und g_1 zu p teilerfremd seien. Sei a_nx^n der höchste nichtverschwindende Term von f_1, $b_m x^m$ der von g_1. Es folgt daraus sofort $fg = h_1 + ph_2$ mit $h_2 = f_2 g_1 + f_1 g_2 + p f_2 g_2$ und mit einem Ploynom h_1, dessen höchster Term $a_n b_m x^{n+m}$ nicht durch p teilbar ist. Also ist auch fg nicht durch p teilbar. Da dies für jede Primzahl gilt, ist fg primitiv, wie behauptet.

Ein wichtige Folgerung daraus ist Lemma 2: Jedes über $\mathbb{Z}$ irreduzible Polynom f ist sogar über $\mathbb{Q}$ irreduzibel ist. Angenommen nämlich, $f = gh$ sei eine Zerlegung des ganzzahligen Polynoms f in Polynome g und h mit rationalen Koeffizienten, so kann man durch Herausheben der gemeinsamen Nenner und Zähler eine Darstellung $f = (\frac{a_1}{b_1} g_0)(\frac{a_2}{b_2} h_0) = c g_0 h_0$ mit primitiven, insbesondere ganzzahligen Polynomen g_0 und h_0 und dem Koeffizienten $c = \frac{a_1 a_2}{b_1 b_2}$ erhalten. Nach Lemma 1 ist $g_0 h_0$ primitiv. Weil f als irreduzibles Polynom ebenfalls primitiv ist, ergeben sich aus der Darstellung $f = c g_0 h_0$ als mögliche Werte für c nur 1 und -1. Man kann also a_1, b_1, a_2 und b_2 aus der Produktdarstellung restlos entfernen und erhält (möglicherweise bis auf das Vorzeichen) die Zerlegung von $f = g_0 h_0$ in ganzzahlige Polynome. Dies beweist Lemma 2.

Damit ergibt sich, dass auch in $\mathbb{Z}[x]$ die Zerlegung in irreduzible Elemente (bis auf das Vorzeichen) eindeutig ist. Denn zwei echt verschiedene irreduzible Zerlegungen in $\mathbb{Z}[x]$ wären auch echt verschiedene irreduzible Zerlegungen über $\mathbb{Q}[x]$, im Widerspruch zur Eindeutigkeit der Faktorisierung im Polynomring über einem Körper (vgl. 2.4).

2.6 Der Sinn hinter dem Beispiel aus der Einleitung

Analysieren wir die Überlegungen im letzten Abschnitt, so sehen wir, dass es nur darauf ankommt, dass $\mathbb{Z}$ selbst faktoriell ist. Also: Ist R ein faktorieller Ring, so auch der Polynomring $R[x]$. Anwendung dieses Satzes auf $R[x]$ zeigt, dass auch $R[x][y] = R[x, y]$ faktoriell ist, ebenso wie jeder Polynomring $R[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ in mehreren Variablen.

Wir kehren nun zum Beispiel der Einleitung zurück und sehen, dass Polynome in den beiden Variablen a und b im Spiel sind. Wir befinden uns also im Quotientenkörper des faktoriellen Rings $\mathbb{Z}[a, b]$, und die gleichen Argumente wie bisher sind anwendbar.

Der Schüler könnte die Fragen in der Einleitung zusammenfassend wie folgt beantworten: Die Aufgabe der Rechnung besteht darin, für den vorgegebenen Bruch ganzzahliger Polynome in zwei Variablen eine gekürzte Darstellung (Normalform) zu ermitteln. Dies gelingt, indem man durch sämtliche gemeinsamen Teiler von Zähler und Nenner dividiert. Im Endergebnis sind die beiden Faktoren a und $a + b$ im Nenner offensichtlich irreduzibel und keine Teiler des Zählers. Deshalb handelt es sich tatsächlich um die gesuchte (bis auf das Vorzeichen) eindeutige gekürzte Darstellung.

Aber noch weitere Fragen an den Schüler wären sinnvoll: Bist Du nach einer systematischen Methode vorgegangen? Wenn ja, kannst Du diese Methode beschreiben und kannst Du erklären, warum sie funktioniert? Wenn nein (wenn Du also einfach so lange probiert hast, bis Du am Ziel warst): Kannst Du Dir sicher sein, dass dieses Probieren immer irgendwann zum Erfolg führt? Für welche Angaben funktioniert Deine Vorgangsweise?

Fragen über Fragen, die zwar teilweise ziemlich schwierig sind, die Rechenaufgabe aber in einen sinnvollen Kontext stellen. Mein Vorschlag: Entweder man versucht, so einen Kontext herzustellen, oder man nutzt den Unterricht für Aufgaben, denen leichter Sinn zu geben ist. Wofür würden Sie sich im vorliegenden Beispiel entscheiden? (Ich glaube, dass es keine allgemeingültige Antwort gibt, weil diese von Vorbildung und Begabung der Schüler abhängt.)

2.7 Einige verstreute Beispiele

Die Frage nach Ziel, Sinn, Methode und theoretischem Hintergrund von Rechenaufgaben stellt sich in fast allen Stoffgebieten des Mathematikunterrichtes. Weil ich nicht im Detail auf alle Beispiele eingehen kann, will ich mich mit einigen wenigen Bemerkungen begnügen, viele davon als Fragen formuliert.

Numerische Rechnungen: Was versteht man unter der Berechnung einer reellen Zahl, wo doch, so genau man auch rechnet, nur endlich viele Dezimalstellen gespeichert werden können?

Wie ist mit der Zweideutigkeit gewisser Darstellungen (z.B. stellen $1,000\ldots$ und $0,999\ldots$ beide die Zahl Eins dar) umzugehen?

Wurzeln, algebraische und transzendente Zahlen: Gibt es sinnvolle Normalformen für den Umgang mit Wurzeln? Adjungieren wir zu $\mathbb{Q}$ z.B. $\sqrt{2}$ und $\sqrt{3}$, bevorzugen wir für das Produkt dieser Zahlen dann die Darstellung $\sqrt{6}$ oder doch lieber $\sqrt{2}\sqrt{3}$? Ähnliche Probleme ergeben sich, wenn etwa die Kreiszahl π mit Winkelfunktion zusammentrifft, weil dann Beziehungen wie $\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ berücksichtigt werden sollten.

Lineare Gleichungssysteme: Zwar stellt das Eliminationsverfahren eine zuverlässige Methode zur Lösung linearer Gleichungssysteme dar. Doch sind im allgemeinen Fall die Lösungsmengen mehrdimensional, und es gibt keine ausgezeichnete Basis, welche sich für eine Normalform der Lösung anbietet. Ein Rechenbeispiel in der Formulierung *Man löse folgendes Gleichungssystem ...* kann also durchaus etwas Unbefriedigendes an sich haben.

Funktionen: Die Gleichungen $\ln xy = \ln x + \ln y$ oder $\sin 2x = 2\sin x\cos x$ sind Ausdruck dafür, dass es in den seltensten Fällen kanonische Darstellungen von Funktionen gibt. Funktionenklassen mit Normaldarstellungen wie Polynome (Normalform $f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ mit den Koeffizienten a_i als bestimmende Parameter) oder gebrochen rationale Funktionen (sei es als gekürzter Bruch von Polynomen oder auch in Partialbruchzerlegung) stellen da eher die Ausnahmen dar. Aufgaben der Form *Man vereinfache folgende Ausdrücke* sind also nur in gewissen eindeutigen Fällen sinnvoll. Oft ist es eine reine Geschmacksfrage, welche Darstellung man als Ergebnis der Rechnung akzeptiert.

Differentiation: Das Differenzieren von Funktionen, die in komplizierter Weise aus elementaren Funktionen aufgebaut sind, ist insofern eine klare Angelegenheit, weil uns die Differentiationsregeln für Summen, Produkte, Quotienten, Verkettungen etc. in ihrer Allgemeingültigkeit systematische Methoden in die Hand geben. Als Kehrseite der Medaille erweist sich das Differenzieren aber gerade dadurch als eine mechanisierbare Tätigkeit, welche, wenn sie zum Selbstzweck erhoben und zu weit getrieben wird, das Denken eher erstickt als fördert.

Integrieren: Beim Aufsuchen von Stammfunktionen verhält es sich anders als beim Differenzieren. Die Standardmethoden wie partielle Integration und Substitution funktionieren bei einfach aufgebauten Funktionen zwar meist verblüffend gut; je komplizierter der Integrand wird, desto wahrscheinlicher ist es jedoch, dass es gar keine in geschlossener Form angebbare Stammfunktion gibt. Die Integranden e^{-x^2} und $\frac{\sin x}{x}$ sind sogar recht einfache Beispiele dafür. Aber: Was heißt überhaupt *in geschlossener Form darstellbar*? Welche Funktionen gelten als elementar und daher als legitime Bausteine? Ist es nicht sinnvoller, von vornherein die zwar weniger elegante, dafür aber allgemeinere numerische Integration als Standardmethode zu bevorzugen? Fragen, die allesamt keine einfache Antwort besitzen, in jedem Fall aber Zweifel aufkommen lassen, ob im Mathematikunterricht der Verfeinerung von Integrationstricks allzu viel Raum zu geben sei; noch dazu in Zeiten, wo Computerprogramme dem Menschen mittlerweile nicht nur in der simplen Differentiation, sondern auch in der weitaus raffinierteren symbolischen Integration haushoch überlegen sind.

3 Allgemeine Gesichtspunkte und Schlussfolgerungen

3.1 Einige resümierende Feststellungen

Es ist an der Zeit, einige wichtige Einsichten, die anhand der bisherigen konkreten Beispiele offen zutage getreten sind, in etwas allgemeinerer Formulierung festzuhalten.

Die Unterscheidung Symbol – Bedeutung: Symbol und dadurch bezeichnetes mathematisches Objekt sind streng auseinanderzuhalten. Die Frage nach dem *Wesen* des mathematischen Objektes mag vom philosophischen Standpunkt aus betrachtet hochgradig nichttrivial sein – insbesondere, wenn es sich um besonders fundamentale Begriffe, wie etwa den Zahlbegriff handelt. Dennoch muss klar sein, dass es in der Mathematik um universelle Ideen geht und nicht nur um formale Zeichenketten.

Was bedeutet *Rechnen* **überhaupt?** Rechnen (im engeren Sinn) bedeutet das gewissen Umformungsregeln folgende Ersetzen einer symbolischen Darstellung für ein mathematisches Objekt durch eine andere bzw. einer Aussage (Gleichung, Ungleichung) durch eine äquivalente. Ziel der Rechnung ist meist das Finden einer möglichst einfachen Darstellung, im Idealfall einer Normalform. Es stellt sich immer die Frage, ob es eine eindeutige Normalform gibt und ob diese durch eine systematische Methode ermittelt werden kann.

Algorithmen: Systematische Rechenmethoden heißen auch Algorithmen. Natürlich ist eine mathematisch strenge Definition für den Begriff des Algorithmus möglich. Diese involviert aber die Einführung von formalen Sprachen, Turingmaschinen o.ä., was hier zu weit führte. Eine für den Schulunterricht brauchbare Präzisierung mag lauten: Ein Algorithmus ist ein systematisches Verfahren zur Lösung einer mathematischen Frage, welches auch vom Computer übernommen werden kann.

Mathematische Theorie: Zur Begründung für das Funktionieren eines Algorithmus, d.h. für den Beweis, dass dieser nach endlich vielen Schritten stets ein korrektes Ergebnis liefert, ist fast immer theoretischer Hintergrund nötig. Oft liefert dieser Hintergrund darüber hinaus aber auch Einsichten, welche dem Rechnen und der Ausführung von Algorithmen erst ihren Sinn geben. Mathematische Theorie ist nicht grau – hinsichtlich Mathematik irrt (oder lügt) Mephistopheles. Grün ist vielmehr der mathematischen Theorien goldner Baum. Denn das lustvolle Klettern in ihm gewährt viel weitere Ausblicke und hilft deshalb wesentlich dabei, adäquate Vorstellungen von der mathematischen Welt zu entwickeln. Dadurch wird das geistige Leben des Schülers bereichert, und er lernt, den Sinn von Rechnungen zu schätzen.

3.2 Vorschlag einer sinnstiftenden Strategie

Folgende Bedingungen scheinen mir NOTWENDIG dafür, dass das Einüben von Rechenmethoden im Mathematikunterricht als sinnvoll gelten kann:

- Die Schüler können zwischen Symbol und Objekt unterscheiden, sind sich also dessen bewusst, dass der Formalismus auch eine Bedeutung hat. (Hierzu muss im Unterricht vor allem die Vorstellungskraft und Phantasie angeregt werden.)
- Die Schüler sind in der Lage, die Rechnung nicht nur sprachlos auszuführen, sondern auch die Aufgabenstellung mit eigenen Worten zu formulieren.
- Die Schüler können beurteilen, ob die gewählten Rechenschritte einer systematischen Methode folgen (als Schritte eines Algorithmus interpretierbar sind), oder ob sie ad hoc gefunden wurden und nur im speziellen Beispiel zum Ziel führen.
- Wenn es sich um einen systematischen Algorithmus handelt, können die Schüler ihn nicht nur soldatisch exekutieren sondern auch beschreiben.
- Wenigstens in der Grundidee herrscht Verständnis, warum der Algorithmus das Gewünschte Ergebnis liefert.

Der Natur notwendiger Bedingungen entsprechend lautet die von mir vorgeschlagene Strategie: Vor allen Rechenaufgaben überprüfen, ob die obigen Bedingungen erfüllt sind. Falls dies nicht der Fall ist, muss die Entscheidung getroffen werden, ob man an der Erfüllung der Bedingungen arbeiten will, oder ob man lieber die Rechenaufgabe aus dem Unterricht streicht. Der Startschuss zum Rechnen soll nicht ohne das notwendige Vorverständnis fallen.

Ich hege ernsthafte Zweifel, ob all diese Bedingungen auch nur bei den Algorithmen für die Grundrechnungsarten erfüllt sind. Und das nicht nur bei Volksschülern, sondern auch bei Maturanten. Wieviele Erwachsene wären in der Lage, den üblichen Divisionsalgorithmus allgemein zu beschreiben und zu erklären?

Sollten meine Zweifel tatsächlich berechtigt sein, kann der Ausweg nicht allein heißen: *mehr Divisionen üben*, sondern zusätzlich vor allem: *auch beim Dividieren zuerst das Denken salonfähig* *machen*. Denn auch bei den Grundrechnungsarten ist das Wachrufen von Vorstellungen, also Denken im ganzheitlicheren Sinn gefragt. Eine sorgfältige Erklärung der Grundrechnungsarten vermittelt durchaus nichttriviale und sogar substanziellere Ideen als das formale und oft orientierungslose Herumrechnen in irgendwelchen dem Schüler unverständlichen algebraischen Strukturen oder im Infinitesimalkalkül.

Im Bewusstsein, dass das Christkind nicht alles bringen kann, was sich der kleine Mathematiker wünscht, ergänze ich meine Wunschliste dennoch durch einige weitere Fragen, deren Behandlung im Mathematikunterricht mir sinnvoller erscheint, als zu ausgedehnte Rechenexerzitien.

- Wie effektiv ist ein verwendeter Algorithmus, möglicherweise auch im Vergleich mit anderen naheliegenden Methoden? (Beispiel: Euklidischer Algorithmus im Vergleich mit der Primfaktorzerlegung für die Berechnung des ggT)
- Funktioniert der Algorithmus für alle denkbaren Angaben, oder gibt es Einschränkungen?
- Welche theoretischen Einsichten sind für das Verständnis eines Algorithmus nötig?
- Was ist überhaupt ein Algorithmus? (Hier ließen sich extrem wertvolle Verbindungen zum Unterrichtsfach Informatik herstellen.)

3.3 Programmatisches

Rechnen als automatisierbarer, unintellektueller Teil der Mathematik darf nie zum Selbstzweck werden. Es gibt aber zahlreiche Zwecke, welche ihm Sinn geben können: Rechnen kann von praktischem Nutzen sein. Es kann als Bestandteil von Beweisen und Argumentationen Ideen sichtbar oder im Kontext konkreter Beispiele Abstraktes leichter zugänglich machen. Das *Üben* als solches ist aber nur insoweit sinnvoll, als es das Verständnis für allgemeinere Methoden und Ideen verbessert.

Leider ist die Unterrichtspraxis oft weit entfernt von den hier formulierten Zielen, obwohl diese erfahrungsgemäß kaum Dissens hervorrufen. Mehrere Erklärungen bieten sich dafür an. Die erste setzt bei den Schülern an: Unreflektiertes Tun ist in gewisser Hinsicht leichter als stringentes Denken, klares Formulieren und eigenständiges Erarbeiten von Vorstellungen. Deshalb lassen sich wenig ambitionierte Schüler oft in eine fremdbestimmte Haltung fallen, aus der heraus sie den Unterricht nur mehr über sich ergehen lassen, anstatt aktiv Interessantes einzufordern.

Andere Erklärungen – und hier müssen Bildungsverantwortliche ansetzen – nehmen eher die Lehrer ins Visier, wobei ich Universitätslehrer dezidiert einschließe: Ein auf standardisierte Rechenaufgaben ausgerichteter Unterricht kostet viel weniger Zeit beim Zusammenstellen von Prüfungen und Schularbeiten. Die Mühe, die es kostet, sinnvolle Prüfungen zusammenzustellen, lohnt aber zumindest aus drei Gründen: Erstens fördern sinnvolle Prüfungen zumindest langfristig sinnvolleres Lernen bei den Schülern. Zweitens kommen angemessenere Benotungen zustande. (Viele phantasiebegabte Schüler scheitern in der Mathematik an banalen Rechenfehlern ohne Signifikanz, während dumpfes Befehlsempfängertum und geistiges Dahindämmern oft belohnt werden, sofern in der mechanischen Rechenknechtschaft beim weitgehend automatisierten Hantieren mit Formeln nur die Anzahl der Missgriffe unter einer gewissen Schwelle bleibt.) Und drittens erhält man als Prüfer einen realistischen Eindruck vom tatsächlichen Leistungsniveau der Schüler oder Studenten. Dass dies oft nicht nur mit Freude verbunden ist, darf keine Rechtfertigung dafür sein, sich falschen Illusionen hinzugeben. Lieber eine sinnvoll gestellte Prüfung mit Milde beurteilen, als sich von irrelevanten Rechenfertigkeiten über das mangelhafte Verständnis der Schüler im Unterricht hinwegtäuschen lassen! Denn die Wahrheit ist auch Lehrern und Prüfern zumutbar.

Die Mathematik besitzt so viele Aspekte: Sie ist von praktischem Nutzen. Sie ist der Schlüssel zu einem besseren Verständnis unterschiedlichster Vorgänge in Natur, Wirtschaft etc. Als begriffliche Wissenschaft ist sie exemplarisch für logische Korrektheit und sprachliche Genauigkeit. Kaum irgendwo sonst kann in einer der Mathematik und insbesondere der mathematischen Logik vergleichbaren Klarheit der Unterschied zwischen Symbol und Bedeutung, also über das innerste Wesen von Sprache selbst gelernt werden. Die Mathematik hat mit den fundamentalsten

Formen unseres Denkens zu tun; deshalb sind große Teile der Philosophie, insbesondere der Erkenntnistheorie heutzutage ohne Einsichten in die moderne Mathematik (und Physik) nicht mehr zugänglich. Viele Mathematiker fühlen sich vor allem von den ästhetischen Reizen der Mathematik angetrieben, wodurch sich faszinierende Analogien zur Kunst auftun. Andere lieben vor allem die Herausforderung des kompetitiven Problemlösens und zeigen damit auch nicht zu unterschätzende Parallelen zwischen Mathematik und Sport. Zur Vermittlung all dieser Aspekte ist, je nach Thema mehr oder weniger, doch immer auch wenigstens ein bisschen Rechnen als Mittel zum Zweck nötig. Warum aber gehen diese vielfältigen und interessanten Aspekte so häufig in öden Rechnereien unter?!